

קובץ זה נכתב על-ידי שלומי.
אין להעתיקו ואין להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

פתרון למבחן מ 21.02.21

שאלה 1

א.

$$\begin{aligned} P(\max\{X, Y, Z, W\} = 8) \\ &= P(\max\{X, Y, Z, W\} \leq 8) - P(\max\{X, Y, Z, W\} < 8) = \\ &= P(\max\{X, Y, Z, W\} \leq 8) - P(\max\{X, Y, Z, W\} \leq 7) = \\ &= 0.8^4 - 0.7^4 \end{aligned}$$

הערות

המאורעות שהמכסימום קטן או שווה ל 8 ושהוא לא קטן מ 8 הם תלויים. לכן אין להכפיל הסתברויות של מאורעות אלה.

יתכן שיותר ממשתנה אחד מקבל את הערך 8.

אין לפתור בשלבים על-ידי בחירת משתנה שיקבל את הערך 8 והגבלת האחרים לערכים עד 8. זה גורם לחזרות בספירה. יתכן שמשתנה נוסף מקבל את הערך 8 והמקרה נספר גם כשהוא הראשון שנבחר להיות שווה ל 8.

ב.

יקבל ערך זוגי אם לפחות אחד משני המשתנים X, Y מקבל ערך זוגי. זה קורה בסיכוי $1 - 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$ (חיסור המשלים) שזה גם $0.5 + 0.5 - 0.5^2$ לפי חישוב הסתברות איחוד של מאורעות לא זרים.

ג.

$$\begin{aligned} P(X + Y + Z + W > 38) &= \\ &= P(X + Y + Z + W = 40) + P(X + Y + Z + W = 39) = \\ &= 0.1^4 + \binom{4}{3} 0.1^3 \cdot 0.1 \end{aligned}$$

(כדי שהסכום יהיה 39, דרוש ששלוש פעמים תתקבל תוצאת 10 ופעם אחת תתקבל תוצאת 9).

ד.

שונויות של משתנה אף פעם לא קטנה מאפס. כאן יתכן ש $Y = 11 - X$ כאשר שני המשתנים X, Y הם אחידים. במקרה זה הסכום הוא קבוע ולכן השונויות שלו היא אפס.

ה.

יתכן שלמאורע זה תהיה הסתברות 0.9. נתן דוגמא שבה זה קורה.
עבור כל $1 \leq i \leq 9$ מתקיים $P(X = i + 1, Y = Z = W = i) = 0.1$
ומתקיים $P(X = 1, Y = Z = W = 10) = 0.1$.
כך לכל אחד מהמשתנים יש התפלגות $U[1, 10]$.

הערה

אין לקבע משתנה מסוים לערך מסוים. אם למשל קובעים ש X מקבל רק את הערך 10, אז הוא כבר לא בעל התפלגות אחידה. נדרש שהוא יהיה בעל התפלגות אחידה.

שאלה 2

א.

$$HG(20; 10, 90)$$

(בוחרים 20 פרטים מתוך 10 פרטים מיוחדים ו 90 פרטים אחרים).

הערה

ההתפלגות אינה בינומית. אם בפעם מסוימת נבחר תפוז פגום, אז זה מקטין את הסיכוי לבחירת תפוז פגום בפעם אחרת.

ב. לגבי סלסלה בודדת הסיכוי הוא $\frac{\binom{10}{8}\binom{90}{12}}{\binom{100}{20}}$. לא יכול להיות שסימולטנית ביותר מסלסלה אחת יהיו 8 תפוזים פגומים. לכן הסתברות האיחוד שווה לסכום ההסתברויות שהוא $5 \cdot \frac{\binom{10}{8}\binom{90}{12}}{\binom{100}{20}}$.

ג. תוחלת אינדיקטור שבסלסלה מסוימת יש שני תפוזים פגומים היא $\frac{\binom{10}{2}\binom{90}{18}}{\binom{100}{20}}$.
תוחלת סכום חמשת האינדיקטורים שווה לסכום התוחלות של האינדיקטורים שהיא

$$5 \cdot \frac{\binom{10}{2}\binom{90}{18}}{\binom{100}{20}}$$

הערה

מספר הסלסלות שבהן בדיוק שני תפוזים פגומים לא מתפלג בינומית כי יש תלות בין האינדיקטורים.

ד. מדובר בשונות הסכום של חמישה אינדיקטורים שווי ההתפלגות ששווה לסכום השונות של האינדיקטורים ועוד פעמיים סכום השונות המשותפות. מכיון שהאינדיקטורים הם שווי התפלגות ושווי התפלגות משותפת, אז השונות שווה ל 5 פעמים השונות של אינדיקטור בודד ועוד $2 \cdot \binom{5}{2}$ השונות המשותפות של שני אינדיקטורים מסוימים.
השונות של אינדיקטור בודד שווה למכפלת ההסתברויות שלו ושל המשלים שלו.
היא שווה ל $\frac{\binom{90}{20}}{\binom{100}{20}} \cdot \left[1 - \frac{\binom{90}{20}}{\binom{100}{20}} \right]$.
השונות המשותפת שווה לתוחלת מכפלת האינדיקטורים פחת מכפלת התוחלות של האינדיקטורים. היא שווה ל $\frac{\binom{90}{40}}{\binom{100}{40}} - \frac{\binom{90}{20}}{\binom{100}{20}} \cdot \frac{\binom{90}{20}}{\binom{100}{20}}$.
(בשתי הסלסלות אין תפוזים פגומים אם נבחרים להן 40 תפוזים מתוך 90 התפוזים הלא פגומים).

שאלה 3

א. בהינתן ששני המשתנים הם באותו קטע אז ההסתברות ששניהם בקטע הראשון היא $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 0.8$ וההסתברות ששניהם בקטע השני היא 0.2 (המשלים).
אם X הוא בקטע הראשון אז התוחלת שלו היא $\frac{0+2}{2} = 1$ ואם הוא בקטע השני אז התוחלת שלו היא $\frac{2+3}{2} = 2.5$. לפי חישוב תוחלת שלמה התוחלת היא $0.8 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2.5 = 1.3$.
ב. אם נתון ששניהם בקטעים שונים, אז משיקולי סימטריה X נמצא בכל אחד מהקטעים בסיכוי שווה. לכן בתנאים אלה התוחלת היא $0.5 \cdot \frac{0+2}{2} + 0.5 \cdot \frac{2+3}{2}$ שזה 1.75.