פתרון הבחינה מ 17/02/09

שאלה 1

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)+p^5$$

שאלה 2

עבור כל $1 \le i \le 6$: בשתי ההטלות תתקבל תוצא i בסיכוי $\frac{1}{36}$. לכן תוצאה שווה תתקבל בסיכוי $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. אם אין שיוויון, אז לכל אחת מההטלות יש סיכוי שווה להיות גבוהה יותר מהשניה.

לכן לכל אחת יש סיכוי של $\frac{5}{12}=\frac{1-\frac{1}{6}}{2}$ להיות גבוהה יותר.

שאלה 3

נפתור לפי עקרון ההכלה וההפרדה.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+$$
$$+P(A\cap B\cap C)=0.2+0.3+0.4-0.2\cdot 0.3-0.2\cdot 0.4-0.3\cdot 0.4+0=0.64$$

שאלה 4

נחשב הסתברות שלמה:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2}=\frac{7}{12}$$

שאלה 5

<u>פתרון בדרך ראשונה</u>

אם הכדור הראשון הוא כחול אז מדובר בכד הראשון בסיכוי $\frac{5}{7}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{7}{12}}$ ומדובר בכד השני בסיכוי $1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$. כעת כאשר משקללים את ההסתברויות האלה מקבלים שההסתברות להוציא בפעם הבאה כדור כחול היא $\frac{4}{7}=\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{4+1}+\frac{2}{7}\cdot\frac{0}{0+2}$.

<u>פתרון בדרך שניה</u>

יהי A - המאורע שהראשון כחול. יהי B - המאורע שהשני כחול.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 0}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\cdots$$

שאלה 6

$$P(X+Y=4)=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=1)\overset{I}{=}$$
$$=P(X=1)P(Y=3)+P(X=2)P(Y=2)+P(X=3)P(Y=1)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{19}{81}$$

I. השתמשנו באי תלות בין המשתנים.

שאלה 7

מכיון ש X ו Y הם ב"ת אז הם גם בלתי מתואמים ומתקיים $E(XY)=E(X)E(Y)$.

מתקיים כאן $E(X)=E(Y)=\frac{1+6}{2}=3.5$. לכן $E(XY)=3.5^2=12.25$.

שאלה 8

נגדיר משתנה Z - מספר הכדורים בכד השני.

השונות המשותפת בין משתנה מנוון לבין כל משתנה אחר שווה לאפס. $X+Z$ הוא משתנה מנוון שמקבל רק את הערך 3. $0=COV(3,Y)=COV(X+Z,Y)=COV(X,Y)+COV(Z,Y)$

אך משיקולי סימטריה $COV(X,Y)=COV(Z,Y)$ ולכן כל אחד מהם שווה לאפס.

הערה: אפשר לתת פתרון ארוך יותר המתבסס על חישוב ההתפלגות המשותפת.

$Y \backslash X$	0	1	2	3	P_Y
1	$\frac{1}{2^3}$	0	0	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	0	$\frac{3}{4}$
P_X	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

$$E(X)=\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3=\frac{3}{2}$$
$$E(Y)=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot 2=\frac{7}{4}$$
$$E(XY)=\frac{1}{8}\cdot 0\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 3\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 1\cdot 2+\frac{3}{8}\cdot 2\cdot 2=\frac{21}{8}$$
$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{21}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{4}=0$$

<u>שאלה 9</u>

יש $99 = 1 - 100$ מעברים שבהם יכולה התוצאה להתחלף. בכל אחד מהם יש שינוי בסיכוי

$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ (דרוש שתוצאה אחת תהיה "עץ" והשניה "פלי" או להפך).

כל אחד מ 99 האינדיקטורים מקבל את הערך 1 בהסתברות $\frac{4}{9}$. תוחלת סכום האינדיקטורים שווה לסכום

התוחלות ולכן היא שווה ל $44 = 99 \cdot \frac{4}{9}$.

<u>שאלה 10</u>

מספר זה יהיה זוגי אם תוצאת ההטלה ה- 100 תהיה זהה לתוצאת ההטלה הראשונה. זה קורה בסיכוי

$\frac{5}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$.

<u>הערה</u>: מספר זה אינו בעל התפלגות בינומית. הסיבה היא שיש תלות בין המאורעות שפעם אחת היה שינוי ושבפעם הבאה יהיה שינוי. אם בפעם מסוימת היה שינוי אז ברור שבשתי הטלות שכנות הושגו תוצאות שונות ולכן משיקולי סימטריה, ההסתברות המותנה שהשניה מהן היא "עץ" היא $\frac{1}{2}$. כך נקבל שההסתברות לשינוי במעבר הבא היא חצי ולא כמו מה שקיבלנו בחישוב ההסתברות הלא מותנה.

שלומי