פתרון לבחינה מ 16/02/17

שאלה 1

א. בכל הטלה מתקבל בסיכוי $\frac{2}{6}$ תוצאה של 5 או 6 וזאת באופן ב"ת בהטלות האחרות.

לכן מספר הפעמים שבהם מתקבל 5 או 6 מתפלג $Bin\left(20,\frac{2}{6}\right)$ והשונות היא

$20\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}$.

הערה

יש תלות בין מספר הפעמים שמקבלים 5 ומספר הפעמים שמקבלים 6. שונות מספר הפעמים שמקבלים 5 או 6 אינה שווה לסכום השוניות של מספר הפעמים שמקבלים 5 ומספר הפעמים שמקבלים 6.

ב. כל פאה מתקבלת בדיוק פעם אחת בסיכוי $\binom{20}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{19}$. זו היא התוחלת של כל אינדיקטור לקבלתה של כל תוצאה בדיוק פעם אחת. תוחלת מספר הפאות שיתקבלו בדיוק פעם אחת שווה לסכום התוחלות של האינדיקטורים האלה. זאת אומרת ל

$6\cdot\binom{20}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{19}$.

הערה

לא נכון להגיד שההסתברות שיהיה בדיוק מספר אחד שמופיע בדיוק פעם אחת היא $\frac{\binom{6}{1}\cdot 20\cdot 5^{19}}{6^{20}}$ או שההסתברות שיהיו בדיוק שלושה מספרים שמופיעים בדיוק פעם אחת היא $\frac{\binom{6}{3}\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 3^{17}}{6^{20}}$. חישובים אלה מתבססים על שריון מקומות בודדים למספרים מסוימים, והמשך בחירת מספרים מבין המספרים האחרים למקומות האחרים. אבל, בתהליך זה נספרות גם אפשרויות שבשלב השני מספרים נוספים יופיעו בדיוק פעם אחת, ואז יהיו יותר מספרים שיופיעו בדיוק פעם אחת. החישוב הזה מביא לתשובה מספרית שהיא קרובה לתוצאה המבוקשת. אבל, זו תשובה לא נכונה.

ג. יהי A - המאורע שהפאה 6 התקבלה בכל 20 ההטלות.
יהי B - המאורע שהפאה 6 התקבלה בלפחות 19 הטלות.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{20}}{\binom{20}{19}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{19}\cdot\frac{5}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^{20}}$$

הערה

לא ידוע שקבלנו תוצאה 6 ב 19 הטלות מסוימות.

שאלה 2

א. הספרה הראשונה היא תמיד 5. לכן התוחלת שלה היא 5.

התוחלת של כל אחת מהספרות האחרות היא $\frac{0+9}{2}=4.5$.

תוחלת הסכום שווה תמיד לסכום התוחלות. זאת אומרת ל $5+4.5+4.5$.

ב. נשים לב שערכן של הספרות השונות הוא ב"ת. לכן תוחלת המכפלה של הספרות השונות שווה למכפלת התוחלות שהיא $5\cdot 4.5\cdot 4.5$.

ג. נשים לב שכאן ערכה של הספרה השניה תלוי בערכה של הספרה הראשונה (יש מתאם שלילי ביניהן). תוחלת המכפלה אינה שווה למכפלת התוחלות.

אם הספרה הראשונה היא 5, אז אין תלות בין הספרות, כאשר ערכה של השניה בעל תוחלת $\frac{5+9}{2}=7$ וערכה של השלישית בעל תוחלת $\frac{0+9}{2}=4.5$.

אם הספרה הראשונה היא 6, אז אין תלות בין הספרות, כאשר ערכה של השניה בעל תוחלת $\frac{0+4}{2}=2$ וערכה של השלישית בעל תוחלת $\frac{0+9}{2}=4.5$.

לכן לפי תוחלת שלמה התוחלת המבוקשת היא $0.5\cdot 5\cdot 7\cdot 4.5+0.5\cdot 6\cdot 2\cdot 4.5$.

שאלה 3

א. מתקיים

$$P(Y_1=0)=P(0\le X_1<1)=\frac{1-0}{2.5-0}=0.4$$

$$P(Y_1=1)=P(1\le X_1<2)=\frac{2-1}{2.5-0}=0.4$$

$$P(Y_1=2)=P(2\le X_1<2.5)=\frac{2.5-2}{2.5-0}=0.2$$

ב. סדרת המשתנים $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות בעלי שונות סופית.

על סדרת משתנים מקריים ב"ת שווי התפלגות בעלי שונות סופית חל החוק החלש, זאת אומרת שמתקיים עבור כל $\delta>0$: $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}-E(Y_1)\right|>\delta\right)=0$.

מכיון שמתקיים $E(Y_1)=0.4\cdot 0+0.4\cdot 1+0.2\cdot 2=0.8$, לכן הערך 1 רחוק מ $E(Y_1)$ ב $\delta=0.2$. לכן הגבול הוא אפס.

שאלה 4

ראשית מחכים להופעת תוצאת "עץ". ברגע שהתקבל "עץ", עם הופעת ה"פלי" הראשון שאחריו, יתקבל הרצף. לכן התוחלת היא $\frac{1}{1/3}+\frac{1}{2/3}=4.5$.

(הזמן עד קבלת ה"עץ" הראשון מתפלג $G\left(\frac{1}{3}\right)$ וזמן הצפיה ל"פלי" מתפלג $G\left(\frac{2}{3}\right)$).

<u>הערות</u>
מספר ההטלות עד קבלת הרצף הנדרש לא מתפלג גאומטרית. נמחיש זאת בכמה דרכים.
משתנה גאומטרי יכול לקבל את הערך 1. כאן הרצף לא יכול להתקבל כבר בהטלה הראשונה.
בהתפלגות גאומטרית יש תמיד אותו סיכוי לקבל הצלחה בהינתן שעד שלב מסוים לא קבלנו הצלחה. כאן הסיכוי לקבל את הרצף הנדרש כבר בהטלה השניה הוא $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$, אבל בהינתן שלא קבלנו אותו עד שלב מסוים, הסיכוי שנקבל אותו באותו שלב אינו $\frac{2}{9}$.
לגבי משתנה גאומטרי, פונקצית ההסתברות שלו היא מונוטונית יורדת. אבל כאן, הסיכוי לקבל את הרצף הנדרש לראשונה בפעם השלישית הוא גם $\frac{2}{9}$ (לשם כך דרוש שהרצף יתקבל בהטלות השניה והשלישית ולא משנה איזו תוצאה קבלנו בהטלה הראשונה, כי אם בהטלה השניה מקבלים "עץ", אז בכל מקרה אין רצף בשתי ההטלות הראשונות).

<u>שאלה 5</u>

<u>א.</u> לא ניתן.
ב 5 הטלות ב"ת של מטבע הוגן יש במרחב המדגם $2^5 = 32$ נקודות שוות הסתברות.
לא ניתן לחלק אותן ל 6 קבוצות שוות הסתברות.

<u>ב.</u> כן ניתן.
תחילה נבצע הטלה בודדת של המטבע. אם יתקבל "עץ" אז נגיד שבקוביה התקבלה אחת מהתוצאות 1,2,3, אם יתקבל "פלי" אז נגיד שבקוביה התקבלה אחת התוצאות 4,5,6.
בהטלות הבאות נחליט איזה משלושת התוצאות שנשארו אפשריות תתקבל.
נבצע סדרה של הטלות של 3 מטבעות, עד קבלת הכרעה. הכרעה תתקבל בכל מקרה שלא התקבלה אותה תוצאה בשלושת ההטלות.
אם ב 3 הטלות, בהטלה הראשונה התקבלה תוצאה שונה משתי האחרות, אז נגיד שהתקבלה התוצאה הראשונה.
אם ב 3 הטלות, בהטלה השניה התקבלה תוצאה שונה משתי האחרות, אז נגיד שהתקבלה התוצאה השניה.
אם ב 3 הטלות, בהטלה השלישית התקבלה תוצאה שונה משתי האחרות, אז נגיד שהתקבלה התוצאה השלישית.
לכל אחת משלושת האפשרויות האלה יש אותה הסתברות.
הסיכוי שב 3 הטלות נתונות לא נקבל הכרעה הוא הסיכוי ששלוש הטלות הן זהות.
סיכוי זה הוא $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$. לכן הסיכוי שבשלוש הטלות נתונות כן נקבל הכרעה הוא $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. מספר השלשות שיהיו עד קבלת הכרעה מתפלג $G\left(\frac{3}{4}\right)$, ולכן הוא בעל תוחלת $\frac{1}{3/4}=\frac{4}{3}$. בכל שלשה מטילים 3 מטבעות. הטלות אלה באות אחר הטלת המטבע הראשון. לכן תוחלת מספר ההטלות היא $1+\frac{4}{3}\cdot 3=5$.

שלומי