

קובץ זה נכתב על-ידי שלומי.
אין להעתיקו ואין להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

פתרון למבחן מ 15.6.20

שאלה 1

א. ההתפלגות היא $HG(5; 5, 4)$. יש בחירה ללא החזרה של 5 פרטים מתוך אוכלוסיה שבה הצהובים והירוקים הם המיוחדים והכחולים הם הלא מיוחדים.

ב.
$$\frac{\binom{4}{4} \binom{5}{2}}{\binom{9}{6}}$$

ג. התוחלת היא $\frac{7}{3}$.

לכל כדור שאינו צהוב יש סיכוי של $\frac{1}{3}$ להיות האמצעי בקבוצת הכדורים שמכילה אותו ואת שני הכדורים הצהובים. סיכוי להיות האמצעי שווים לסיכויים של כל אחד מהכדורים הצהובים להיות אמצעי. הוא אמצעי ב 2! מתוך 3! הסידורים של שלושתם. לכן תוחלת האינדיקטור שמצביע על כך שהוא האמצעי היא $\frac{1}{3}$. תוחלת סכום האינדיקטורים של 7 הכדורים שאינם צהובים היא $\frac{7}{3}$.

ד. התוחלת היא 5.

יש 7 כדורים שאינם הכחולים הקיצוניים. שני הכחולים האחרים הם בודאי ביניהם. כל אחד מהצהובים או מהירוקים הוא ימני יותר מכל הכחולים בסיכוי $\frac{1}{5}$ ושמאלי יותר מכל הכחולים בסיכוי $\frac{1}{5}$. לכן ההסתברות שהוא בין שני הכחולים הקיצוניים הוא $\frac{3}{5}$. לכן תוחלת מספר הכדורים שהם בין שני הכחולים הקיצוניים היא $5 \cdot \frac{3}{5} = 3$.

פתרון בדרך ראשונה

ה. שני הצהובים חייבים להיות אחד ליד השני. שלושת הירוקים חייבים להופיע בגוש אחד. ארבעת הכחולים יכולים להופיע בגוש אחד או בשני גושים שכל אחד מהם מכיל שני כדורים.

יש שלושה גושים בסיכוי $\frac{3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!}{9!}$.

(לסדר את שלושת הגושים ולסדר סדר פנימי בכל גוש).

יש ארבעה גושים כולל שני גושים של שניים כחולים בסיכוי $\frac{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}{9!}$.

למצוא סדר בין גוש הצהובים וגוש הירוקים. למצוא סידור פנימי בכל אחד משני הגושים האלה. יש 3 אפשרויות לחלק את שני הכחולים לשני זוגות. צריך לסדר את כל אחד משני הזוגות. ויש $3 \cdot 2$ אפשרויות להכניס את כל אחד משני הזוגות בחלק אחר מבין שלושת החלקים שלפני גוש הצהובים והירוקים בין שני גושים אלה ומימין לגושים אלה.

פתרון בדרך שניה

יש שלוש דרכים לחלק את ארבעת הכחולים לשני גושים. כעת יש ארבע גושים. נסדר את ארבעת הגושים ונבחר סידור פנימי לכל גוש. כל זוג כחולים יכול להיות הזוג השמאלי יותר או הימני יותר. נספרות גם האפשרויות ששני הזוגות צמודים.

נקבל הסתברות $\frac{3 \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2!}{9!}$.

פתרון בדרך שלישית

במקרה הכללי צריך למצוא מקומות לכדורים מהצבעים השונים.

יש $|\Omega| = \binom{9}{4} \binom{5}{3} \binom{2}{2}$ אפשרויות.
 במאורע המבוקש יש $|A| = \binom{4}{2} \cdot 2$ אפשרויות.

הסבר

מסדרים ארבעה גושים בשורה. צריך למצוא שני מיקומים לשני הגושים של שני כדורים כחולים ואחר כך למקם בשני המקומות הנותרים את שני הגושים האחרים משני הצבעים האחרים.
 ההסתברות המבוקשת היא $\frac{|A|}{|\Omega|}$.

שאלה 2

א. $b_1 = P(X_1 < 1) = P(X_1 = 0) = e^{-1}$
 לא קיימים אין סוף ערכים כאלה.

ב. המשתנים בסדרה הם שווי התפלגות ב"ת ובעלי שונות סופית. לכן כאשר מספר המשתנים שעליהם עושים ממוצע שואף לאין סוף, פונקציית ההסתברות המצטברת שואפת בנקודה שהיא התוחלת ל $\phi(0)$ ששווה ל 0.5. משתנה נורמלי הוא רציף ולכן אין הבדל בין קטן לקטן שווה. לכן רק במספר סופי של ערכים מתקבל ערך שקרוב ל e^{-1} עד כדי 0.01.

הערות

אי אפשר לקבל את התוצאה מהחוק החלש. החוק החלש חל על סדרת משתנים זו. אבל החוק החלש רק מדבר על קרבה של הממוצע לתוחלת. הוא לא מדבר על הסיכוי שהממוצע קטן מהתוחלת או על הסיכוי שהממוצע גדול מהתוחלת. צריך לדעת שפונקציית ההסתברות המצטברת של משתנה נורמלי מקבלת את הערך חצי בנקודה ששווה לתוחלת המשתנה. משתנה נורמלי הוא סימטרי סביב תוחלתו. בשביל לדעת את זה לא זקוקים לטבלת התפלגות מצטברת של משתנה נורמלי סטנדרטי.

שאלה 3

הערה

כתוב שמרחב המדגם מכיל $6!$ נקודות. לכן בלתי אפשרי ששני אנשים יקחו את אותה מטריה.

א. מכפלת האינדיקטורים יכולה לקבל רק את הערכים 0 ו 1. התוחלת שלה שווה להסתברות שלה לקבל את הערך 1. היא יכולה לקבל את הערך 1 רק אם שני האינדיקטורים מקבלים את הערך 1. זה קורה בסיכוי $\frac{4!}{6!} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}$.

ב. מכפלת האינדיקטורים שווה ל 1 אם חמשת הראשונים מקבלים את המטריה שלהם. זה קורה רק אם כולם מקבלים את המטריה שלהם. זה קורה בסיכוי $\frac{1}{6!}$. השונות של מכפלת האינדיקטורים שהיא אינדיקטור שווה למכפלת הסיכוי שהיא מקבלת את הערך 1 בסיכוי שהיא מקבלת את הערך 0. זה שווה ל $\frac{1}{6!} \left(1 - \frac{1}{6!}\right)$.

שאלה 4

אחרי מספר אי זוגי של מהפכים מקבלים תוצאה שונה מהראשונה. אחרי מספר זוגי של מהפכים חוזרים לתוצאה הראשונה. לכן כאן צריך שתוצאת ההטלה ה 17 תהיה שונה מתוצאת ההטלה הראשונה וגם תוצאת ההטלה ה 100 תהיה שונה מתוצאת ההטלה הראשונה. זה קורה בסיכוי $0.1 \cdot 0.9^2 + 0.9 \cdot 0.1^2$.

הערה

המאורעות שתוצאת ההטלה ה 17 שונה מתוצאת ההטלה הראשונה ותוצאת ההטלה ה 100 שונה מתוצאת ההטלה הראשונה הם תלויים, ולכן לחיתוך שלהם אין הסתברות ששווה למכפלת ההסתברויות שלהם.

שאלה 5

התנאי הוא $a \leq 10$.

המכסימום אף פעם לא קטן מ X לכן תוחלתו אף פעם לא קטנה מהתוחלת של X . אם בהסתברות חיובית המכסימום גדול מ X אז תוחלתו גדולה מהתוחלת של X .

אם $a > 10$ אז Y גדול מ 10 בסיכוי $\frac{3}{4}$ ואילו X גדול מ 10 רק בסיכוי $\frac{2}{3}$.

אם $a \leq 10$ אז ניתן לבנות התפלגות דו מימדית שבה תמיד $Y \leq X$:

$$P(X = 30, Y = 25) = P(X = 20, Y = 15) = P(X = 10, Y = a) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 30, Y = 5) = P(X = 20, Y = 5) = P(X = 10, Y = 5) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

שלומי