

## בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.  
מותר לכל תלמיד להשתמש בשני דפי A4 הכתובים משני הצדדים. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים.  
אסור להשתמש במחשבי כיס.  
בבחינה יש 5 שאלות. ענו על כל השאלות.  
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.  
ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר  $N$  נקודות יקבל ציון  $\min\{N, 100\}$ .  
אנא, השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.  
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

---

### שאלה 1 (50 נקודות)

מסדרים בשורה תשעה כדורים ששניים מהם הם צהובים, שלושה מהם הם ירוקים וארבעה מהם הם כחולים, כך שכל הסידורים הם שווי הסתברות.

- א.** איך מתפלג מספר הכדורים שאינם כחולים שממוקמים בחמשת המקומות הימניים ביותר בשורה?
- ב.** מהי ההסתברות שכל הכדורים הכחולים ימוקמו בששת המקומות הימניים ביותר בשורה?
- ג.** מהי תוחלת מספר הכדורים שימוקמו בין שני הכדורים הצהובים (לאו דוקא בסמיכות אליהם)? יש להגיע לתשובה סופית בצורת מספר טבעי או שבר פשוט.
- ד.** מהי תוחלת מספר הכדורים שיהיו בין הכדור הכחול הימני ביותר לכדור הכחול השמאלי ביותר (כמובן שלאו דוקא בסמיכות אליהם)? יש להגיע לתשובה סופית בצורת מספר טבעי או שבר פשוט.
- ה.** מהי ההסתברות שלגבי כל הכדורים יתקיים התנאי שיש להם לפחות כדור שכן אחד בעל צבע זהה לשלהם? אין להשתמש בפעולות חיסור בשום שלב בדרך הפתרון.

---

### שאלה 2 (20 נקודות)

תהי  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  סדרת משתנים שווי התפלגות ובלתי תלויים. נניח ש  $X_1 \sim P(1)$  (פואסונית עם פרמטר 1).

עבור כל  $1 \leq n < \infty$  יהי  $b_n$  - ההסתברות שממוצע  $n$  המשתנים הראשונים שבסדרה קטן מהתוחלת של  $X_1$ .

- א.** מהו  $b_1$ ?
- ב.** האם קיימים אין סוף ערכי  $n$  טבעיים שעבורם מתקיים  $|b_n - b_1| < 0.01$ ?

**שאלה 3** ( 20 נקודות )

לכל אחד מ 6 משתתפים של פגישה יש מטריה שונה. בסוף הפגישה כל אחד ממשתתפי הפגישה לוקח מטריה אקראית מבין ששת המטריות כך שכל 6 החלוקות של המטריות בין המשתתפים הן שוות הסתברות. עבור כל  $1 \leq i \leq 6$  יהי  $X_i$  אינדיקטור לכך שהאדם  $i$  לוקח את המטריה שלו.

א. מהו  $E(X_1 X_2)$  ?

ב. מהו  $V(X_1 X_2 X_3 X_4 X_5)$  ?

---

**שאלה 4** ( 10 נקודות )

מבצעים סדרת הטלות ב"ת של מטבע שנופל על "עץ" בסיכוי 0.9 ונופל על "פלי" בסיכוי 0.1. כל הטלה החל מההטלה השנייה נקראת מהפך אם תוצאתה שונה מתוצאת הקודמת לה. כך למשל ההטלה השביעית היא מהפך אם ורק אם תוצאתה שונה מתוצאת ההטלה הששית.

מהי ההסתברות שמספר המהפכים הכולל עד ההטלה ה 17 יהיה אי זוגי וגם מספר המהפכים הכולל עד ההטלה ה 100 יהיה אי זוגי ?

---

**שאלה 5** ( 10 נקודות )

יהיו  $X$  ו  $Y$  זוג משתנים מקריים שאינם בהכרח ב"ת.

נניח שמתקיים  $P(X = 10) = P(X = 20) = P(X = 30) = \frac{1}{3}$

ושמתקיים  $P(Y = 5) = P(Y = 15) = P(Y = 25) = P(Y = a) = \frac{1}{4}$  כאשר  $a$  הוא מספר שונה משלושת המספרים 5,15,25.

עבור אילו ערכי  $a$  ממשיים יתכן שיתקיים  $E(\max\{X, Y\}) = E(X)$  ?

---