פתרון לבחינה מ 13.04.18

שאלה 1

א. ההתפלגות היא $G\left(\frac{2}{6}\right)$ (מספר ההטלות עד קבלת תוצאה של 1 או 2).

ב. בכל שלב שעד אליו לא היתה הצלחה, יש הסתברות של $1-\frac{5^2}{6^2}=\frac{11}{36}$ שתתקבל לפחות הצלחה אחת, וזאת באופן ב"ת בשלבים האחרים. לכן ההתפלגות היא $G\left(\frac{11}{36}\right)$.

דרך נוספת

יהי W המשתנה המקבל את הערך המינימלי של X ו Z.

עבור כל $w \geq 1$ טבעי מתקיים

$$P(W>w)=P(X>w,Z>w)=P(X>w)P(Z>w)=\left(\frac{5}{6}\right)^w\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^w=\left(\frac{25}{36}\right)^w$$

כאשר במעבר השני מתבססים על אי תלות.

ומתקיים

$$P(W=w)=P(W>w-1)-P(W>w)=\left(\frac{25}{36}\right)^{w-1}-\left(\frac{25}{36}\right)^w=\frac{11}{36}\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^{w-1}$$

ג. בשלב הראשון התקבלה תוצאה אחרת ולכן לא היתה הצלחה. בכל שלב שאחריו יש הסתברות של $\frac{1}{6}$ להצלחה וזאת באופן ב"ת בשלבים האחרים. לכן מספר ההטלות שלאחר ההטלה הראשונה הוא בעל תוחלת $\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$. לכן התוחלת מההתחלה היא $1+6=7$.

שאלה 2

א. דרוש שיהיו 3 או 4 או 5 תוצאות "פלי". הסיכוי לכך הוא

$$\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

ב. בהינתן שיש רצף של 100 תוצאות זהות, הסיכוי שזהו רצף של 100 "פלי" הוא $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{100}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+\left(\frac{1}{3}\right)^{100}}$ שזה קרוב מאוד ל 1. אם יש רצף של 100 "פלי" אז כדי שיהיה רצף של 101 תוצאות "פלי", דרוש שתהיה בהטלה הבאה עוד תוצאת "פלי". זה קורה בסיכוי של $\frac{2}{3}$. לכן התשובה לשאלה היא בקירוב $\frac{2}{3}$.

שאלה 3

א. X_n הוא סכום של $2n$ אינדיקטורים ב"ת שווי התפלגות וב"ת. לאינדיקטורים יש כמובן שונות סופית. לכן לפי החוק החלש ההסתברות שהממוצע של האינדיקטורים יסטה מהתוחלת שהיא 0.5 ביותר מקבוע חיובי נתון שואפת לאפס. המאורע $\left(|X_n-n|>0.1\sqrt{n}\right)$ הוא המאורע שהממוצע של $2n$ נסיונות סוטה מהתוחלת ב $\frac{0.1\sqrt{n}}{2n}=0.05\frac{1}{\sqrt{n}}$. זו אינה סטייה בקבוע נתון. זו סטייה בגדלים ששואפים לאפס. לכן החוק החלש לא יכול להגיד שום דבר על ההסתברות לסטייה כזאת. סטייה כזאת בכל הסתברות, לא סותרת את החוק החלש.

ב. על פי אי שיוויון צ'בישב ניתן לחסום את ההסתברות לסטייה של $0.1\sqrt{n}$ מהתוחלת ע"י $\frac{V(X_n)}{\left(0.1\sqrt{n}\right)^2}=\frac{2n\cdot0.5\cdot0.5}{0.01n}=50$. זהו חסם הגדול מ 1. לכן הוא לא נותן לנו שום מידע רלוונטי. הוא לא סותר שום הסתברות לסטייה כזאת.

ג. ראו בסעיף א' לגבי תכונות המשתנים המקריים שווי ההתפלגות שנסכמים ב X_n שמאפשרים שימוש במשפט הגבול המרכזי. ראו בסעיף א' באיזו סטייה של הממוצע מהתוחלת מדובר.
ההסתברות שהממוצע גדול מהתוחלת ביותר מ $\frac{0.05}{\sqrt{n}}$ עבור ערכי n גדולים היא בקירוב $1-\phi\left(\frac{\frac{0.05}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{2n}}}\right)$ שזה $1-\phi\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$. ההסתברות שהממוצע קטן מהתוחלת ביותר מ $\frac{0.05}{\sqrt{n}}$ גם שווה בקירוב לאותו ערך. לכן ניתן לקבל קירוב ע"פי משפט הגבול המרכזי.

ד. מדובר על ערכים שמקבלים המשתנים X_n בלי קשר לערכים שמקבלים המשתנים האחרים. לכן ההתפלגויות המשותפות לא רלוונטיות ואי תלות אינה רלוונטית.

שאלה 4

א. כל צמד של גורם 2 וגורם 5 מוסיפים 0 נוסף. לכן מספר האפסים שווה למינימום בין מספר גורמי ה 2 למספר גורמי ה 5 . בהוצאת 75 מספרים, מוציאים לפחות 25 מספרים זוגיים (כי יש רק 50 אי זוגיים). בכל קבוצת המספרים יש בסך הכל 24 גורמי 5 (יש 20 מספרים שמתחלקים ב 5 שמתוכם המספרים 100 , 75 , 50 , 25 מתחלקים פעמיים ב 5). לכן בודאות יש פחות גורמי 5 מגורמי 2. לכן מספר האפסים שווה למספר גורמי ה 5. בכל בחירה של מספר תוחלת מספר גורמי ה 5 שווה ל $\frac{4}{100}\cdot 2+\frac{16}{100}\cdot 1=\frac{24}{100}$.
התוחלת הכוללת של מספר האפסים היא $75\cdot\frac{24}{100}=18$.

<u>הערה</u>

נימוק לא משכנע הוא שמכפילים את $\frac{3}{4}$ מהמספרים ולכן תוחלת מספר האפסים היא $\frac{3}{4}$ ממספרם כאשר מכפילים את כולם שהוא 24. צריך גם לדאוג שיהיו בודאות מספר גורמי 2 ששווה לפחות למספר גורמי ה 5. אם למשל היינו מכפילים 25 מספרים מהתחום, אז תוחלת מספר האפסים לא היתה שווה ל 6. במקרה זה תוחלת מספר גורמי ה 5 היתה שווה ל 6, אבל תוחלת מספר האפסים היתה קטנה יותר.

ב. כמעט בודאות מספר גורמי ה 2 יהיה גדול ממספר גורמי ה 5 ומספר האפסים יהיה שווה למספר גורמי ה 5. תוחלת מספר גורמי ה 5 שמקבלים איליי וליאם היא שווה (סכום התוחלות של ההוצאות הבודדות). לכן התוחלת בסעיף זה קרובה מאוד לתוחלת של סעיף א'. אבל יש סיכוי מזערי שלליאם יהיו פחות גורמי 2 מגורמי 5.
לכן במכפלה שלו תוחלת מספר האפסים קטנה במעט מאוד מתוחלת מספר גורמי ה 5 שהיא מספר שלם. לכן היא אינה שווה למספר שלם.

שלומי