

## פתרון לבחינה מ 13/03/15

### שאלה 1

**א.**  $\binom{4}{2} 0.5^2 \cdot 0.5^2$

( מספר הבנים מתפלג  $Bin(4,0.5)$  )

**ב.** A - לפחות בן אחד  
 B - לא כולם בנים

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{4}{1} 0.5 \cdot 0.5^3 + \binom{4}{2} 0.5^2 \cdot 0.5^2 + \binom{4}{3} 0.5^3 \cdot 0.5}{1 - 0.5^4}$$

( במכנה - 1 פחות ההסתברות שכולם בנים, במונה - ההסתברות שיש בן אחד או שני בנים או שלושה בנים ).

**ג.** Y - מספר הבנים כאשר ידוע שלפחות אחד הוא בן.  
 Y מתפלג כסכום של משתנה  $Bin(3,0.5)$  וקבוע של 1.

$$P(Y=1) = 0.5^3, \quad P(Y=2) = \binom{3}{1} 0.5 \cdot 0.5^2$$

$$P(Y=3) = \binom{3}{2} 0.5^2 \cdot 0.5, \quad P(Y=4) = 0.5^3$$

### שאלה 2

**א.**  $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1+3}{2} + \frac{1+9}{2} = 7$

**ב.**  $P(X > Y) = P(X=1) \cdot 0 + P(X=2) \cdot \frac{1}{9} + P(X=3) \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9}$

**ג.** לפי הנוסחה לחישוב שונות:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) =$$

$$= \left[ \frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 \right] - \left[ \frac{1+3}{2} \right]^2$$

או לפי הנוסחה לחישוב שונות של משתנה אחיד:

$$V(X) = \frac{(3-1+1)^2 - 1}{12}$$

או לפי הגדרת השונות, כאשר  $E(X) = \frac{1+3}{2}$ :

$$V(X) = \frac{1}{3}(1-2)^2 + \frac{1}{3}(2-2)^2 + \frac{1}{3}(3-2)^2$$

**ד.** שני הדברים אפשריים.

כאשר  $Cov(X, Y) < 0$  אז  $E(XY) - E(X)E(Y) < 0$  ואז מתקיים:

$$E(XY) < E(X)E(Y) = \frac{1+3}{2} \cdot \frac{1+9}{2} = 10$$

$E(XY)$  לא יכול להיות קטן כרצוננו. למשל לפי נתוני השאלה הוא לא יכול להיות שלילי, כי בכל מקרה  $X$  וגם  $Y$  הם חיוביים, ולכן גם מכפלתם חיובית. כדי שיתקבל  $Cov(X, Y)$  נמוך, צריך להיות קשר שלילי בין שני המשתנים, זאת אומרת שכל  $X$  עולה,  $Y$  יורד בממוצע. זה צריך להנחות אותנו כאן בבניית דוגמא. נתן דוגמא מפורשת שתראה שיתכן ש  $E(XY) < 9$ :

$$\begin{aligned} P(X=1, Y=7) &= P(X=1, Y=8) = P(X=1, Y=9) = \\ &= P(X=2, Y=4) = P(X=2, Y=5) = P(X=2, Y=6) = \\ &= P(X=3, Y=1) = P(X=3, Y=2) = P(X=3, Y=3) = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

מתקיים

$$E(XY) = \frac{1}{9} \cdot [1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3] < 9$$

הערה

שימו לב שההתפלגויות השוליות, צריכות להיות אחידות כמו שמתואר בשאלה.

### שאלה 3

**א.** המשתנה מתפלג  $Bin\left(8, \frac{1}{3}\right)$  ולכן שונותו שווה ל  $8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ .

**ב.** אם בהטלה הראשונה יצא "עץ", אז לאחר ההטלה הראשונה מבצעים מספר הטלות שמתפלג  $G\left(\frac{2}{3}\right)$  ושככזה יש לו תוחלת  $1.5 = \frac{1}{\frac{2}{3}}$ .

אם בהטלה הראשונה יצא "פלי", אז לאחר ההטלה הראשונה מבצעים מספר הטלות שמתפלג  $G\left(\frac{1}{3}\right)$  ושככזה יש לו תוחלת  $3 = \frac{1}{\frac{1}{3}}$ .

$$\text{לכן תוחלת מספר ההטלות כולל הראשונה היא } 1 + \frac{1}{3} \cdot 1.5 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 3.5$$

נפתור גם בדרך נוספת:

עבור כל זוג משתנים  $X, Y$  מתקיים תמיד

$$X + Y = \min\{X, Y\} + \max\{X, Y\}$$

(עבור כל זוג תוצאות שמתקבל, אחת מהן היא המינימלית והשניה היא המכסימלית או ששתיהן שוות ואז המינימום שווה למכסימום ושניהם שווים לשתי התוצאות.)  
לכן מתקיים

$$E(X) + E(Y) = E(\min\{X, Y\}) + E(\max\{X, Y\})$$

כאן תוחלת מספר ההטלות עד קבלת "עץ" היא  $3 = \frac{1}{\frac{1}{3}}$  ותוחלת מספר ההטלות עד

קבלת פלי היא  $1.5 = \frac{1}{\frac{2}{3}}$ . בהטלה הראשונה בכל מקרה מתקבלת אחת התוצאות, לכן

המינימום שבין זמן הצפיה ל"עץ" וזמן הצפיה ל"פלי" הוא 1. מכאן אפשר לחלץ את זמן

הצפיה למאוחרת שבין התוצאות:  $3 + 1.5 - 1 = 3.5$ .  
 יהי  $a$  - הסיכוי בהינתן שבהטלה הראשונה קבלנו "עץ".  
 יהי  $b$  - הסיכוי בהינתן שבהטלה הראשונה קבלנו "פלי".

$$\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$$

ההסתברות המבוקשת שווה ל

$$a = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot a + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0$$

( בתוך שני צעדים, או שנפלת הכרעה או שבסיכוי  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$  חוזרים למצב שבו קבלנו "עץ"

ראשון ועדיין לא קבלנו שום רצף ).  
 באופן דומה מתקיים

$$b = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot b + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1$$

### הערה

אפשר לחשב את  $a$  ואת  $b$  גם בדרך נוספת:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3}b \\ b = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3} \cdot 0 \end{cases}$$

( בצעד אחד - או שנפלת הכרעה או שעוברים למצב האחר ).

### הערה

שימו לב שההסתברות המבוקשת אינה שווה להסתברות שקבלנו רצף של שני "פלי" בהינתן שההכרעה נפלה בצעדים הראשונים. אם ההכרעה לא נפלה בשני הצעדים הראשונים, זה אומר שבשתי ההטלות הראשונות קבלנו שתי תוצאות שונות. זה אומר שמשיקולי סימטריה, ההטלה השניה היא של "עץ" בסיכוי חצי, וזה משנה את הסיכויים בהמשך.

I. משתנה  $G(0.5)$  מודד את מספר הנסיונות עד קבלת הצלחה בסדרת נסיונות ב"ת בעלי הסתברות 0.5 כל אחד.

את כל אחד מהנסיונות נייצר על-ידי סדרת הטלות ב"ת של המטבע. כדי ליצר נסיון בודד, נבצע סדרה של זוגות של הטלות של המטבע עד שנקבל זוג שבו שתי התוצאות שונות. בזוג זה יש תוצאת "עץ" אחת ותוצאת "פלי" אחת. משיקולי סימטריה, ההסתברות שהראשונה בזוג היא של "עץ" היא חצי. הצלחה בניסוי תתקבל אם ורק אם התוצאה הראשונה בזוג זה היא של "עץ".

הערה שמתייחסת לפתרון לא נכון:

הסיכוי שהמהפך הראשון יהיה מ"עץ" ל"פלי" אינו שווה לחצי. בסיכוי  $\frac{2}{3}$  בהטלה

הראשונה מקבלים "פלי" ואז המהפך הראשון מגיע כאשר מתקבל "עץ". לכן הסיכוי

שהמהפך הראשון הוא מ"פלי" ל"עץ" הוא  $\frac{2}{3}$  ולא חצי. לכן אין להסתכל על המקומות

שבהם התוצאה שונה מהקודמת. מה שעשינו בפתרון הוא דבר אחר: הגדרנו זוגות של מקומות והסתכלנו על הזוגות של מקומות שבהם התקבלו תוצאות שונות.

### הערות נוספות

כאן יש ליצור סדרת אינדיקטורים ולא רק אינדיקטור אחד.

הסיכוי שבזוג מקומות נתון יהיו שתי תוצאות שונות הוא  $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$  . לכן הוא אינו שווה לחצי.

---

שלומי