פתרון לבחינה מ 13.02.20

שאלה 1

עבור $y<0$ מתקיים $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X\le y)=P\left(X\le \frac{y}{2}\right)=0$.

עבור $y\ge 0$ מתקיים $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X\le y)=P\left(X\le \frac{y}{2}\right)=1-e^{-y}$.

הערות

קבלנו ש $Y\sim exp(1)$. אבל לא חובה לציין זאת. כאן די למצוא את פונקצית ההסתברות המצטברת.

לגבי כל פונקצית הסתברות מצטברת צריך להתקיים $\lim_{y\to\infty} F_Y(y)=1$.

שאלה 2

הערות

יש תלות בין מספר הכדורים הנכנסים לתאים שונים. לכן מספר התאים התפוסים לא מתפלג בינומית ומספר התאים הפנויים לא מתפלג בינומית.

רק מרחב מדגם של כדורים שונים הוא סימטרי ומייצג את הבעיה.

א.
$$\frac{2020}{2020^{117}}=\frac{1}{2020^{116}}$$

לבחור תא שאליו יכנסו כל הכדורים או שכל הכדורים יכנסו לאותו תא שאליו נכנס הכדור הראשון.

ב.
$$\binom{2020}{2}\left[\left(\frac{2}{2020}\right)^{117}-2\left(\frac{1}{2020}\right)^{117}\right]$$

בוחרים שני תאים שאליהם יכנסו כל הכדורים. מחסירים את המקרים שכל הכדורים יכנסו רק לאחד מהשניים.

הערה

כל תא הוא אחד משני תאים בכל זוג של תאים שבו הוא משתתף.

פתרון בדרך שניה

$$\binom{2002}{2}\sum_{k=1}^{116}\binom{117}{k}\left(\frac{1}{2020}\right)^{k}\left(\frac{1}{2020}\right)^{117-k}=$$

$$=\binom{2002}{2}\left[\begin{array}{c}\left(\sum_{k=0}^{117}\binom{117}{k}\left(\frac{1}{2020}\right)^{k}\left(\frac{1}{2020}\right)^{117-k}\right)\\ -\left(\frac{1}{2020}\right)^{117}-\left(\frac{1}{2020}\right)^{117}\end{array}\right]=$$

$$=\binom{2020}{2}\left[\left(\frac{2}{2020}\right)^{117}-2\left(\frac{1}{2020}\right)^{117}\right]$$

פתרון זה מתבסס על הוספת גורמים לסיגמא לצורך קבלת ביטוי שניתן לסכם אותו על-ידי הבינום של ניוטון. את הגורמים שמוסיפים, צריך גם להחסיר.

ג.
$$\left(\frac{135}{2020}\right)^{117}-\left(\frac{134}{2020}\right)^{117}$$

דואגים שכל הכדורים יכנסו ל 135 התאים השמאליים, אבל שלא כולם יכנסו ל 134 השמאליים.

הערות

יכול להיות שיותר מכדור אחד יכנס לתא ה 135.
אין לעבוד עם תהליך דו שלבי של שריון כדור לתא ה 135 ואחר כך המשך חלוקה של יתר הכדורים ב 135 התאים השמאליים. בתהליך כזה אותם מצבים נספרים יותר מפעם אחת- כדור מסוים מושם בתא ה 135 ואחרים מצטרפים אליו באותו תא או שאחר נבחר לתא זה ואחרים מצטרפים אליו.

ד. יהי X_i אינדיקטור לכך שהתא ה i הוא פנוי.
יהי $X=\sum_{i=1}^{2020} X_i$ מספר התאים הפנויים.

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{2020} X_i\right)=\sum_{i=1}^{2020} E(X_i)=2020E(X_1)=2020\left(\frac{2019}{2020}\right)^{117}$$

ה.

$$\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{2020} V(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le 2020} Cov(X_i,X_j)=$$

$$=2020\mathrm{V}(X_1)+2020\cdot 2019Cov(X_1,X_2)$$

מתקיים $\mathrm{V}(X_1)=P(X_1=1)P(X_1=0)=\left(\frac{2019}{2020}\right)^{117}\left[1-\left(\frac{2019}{2020}\right)^{117}\right]$.

מתקיים

$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=\left(\frac{2018}{2020}\right)^{117}-\left(\frac{2019}{2020}\right)^{117}\left(\frac{2019}{2020}\right)^{117}$.

שאלה 3

א.

$$0.1^{41}\cdot 0.9^{40}+0.9^{41}\cdot 0.1^{40}$$

או כל ההטלות במקומות האי זוגיים הם "פלי" וכל ההטלות במקומות הזוגיים הם "עץ" או שכל ההטלות במקומות האי זוגיים הם "עץ" וכל ההטלות במקומות הזוגיים הם "פלי".

הערה

כפי שגם נראה בסעיף ג' יש תלות בין המאורעות של מהפך במקום מסוים ומהפך במקום עוקב. לכן הסיכוי אינו שווה למכפלת הסיכויים של מהפכים במקומות השונים.

ב. אחרי מספר מהפכים אי זוגי מתקבלת תוצאה שונה מהתוצאה הראשונה. אחרי מספר מהפכים זוגי מתקבלת תוצאה זהה לתוצאה הראשונה. לכן דרוש שבהטלות הראשונה וה 93 יתקבלו תוצאות זהות. הסיכוי לכך הוא $0.1^2+0.9^2=0.82$.

ג. פתרון בדרך ראשונה

$$\frac{0.9\cdot 0.1\cdot 0.9+0.1\cdot 0.9\cdot 0.1}{0.9\cdot 0.1+0.1\cdot 0.9}=0.5$$

זאת לפי שימוש בנוסחת ההסתברות המותנה וחלוקת הסתברות לשני מהפכים רצופים בהסתברות למהפך אחד.

פתרון בדרך שניה

אם ההטלה השמינית היא מהפך אז סימן שתוצאת ההטלה השמינית שונה מתוצאת ההטלה השביעית. מכיון שלכל אחת מהן יש סיכוי שווה להיות "עץ" אז אם ידוע שאחת מהן היא "עץ" אז ההסתברות המותנה שהשמינית היא "עץ" היא 0.5 .
לכן ההסתברות המותנה שהתשיעית היא מהפך היא $0.5\cdot 0.9+0.5\cdot 0.1=0.5$.

שאלה 4

א.

$$E(X|50\le X\le 51)=$$

$$=P(X=50|50\le X\le 51)\cdot 50+P(X=51|50\le X\le 51)\cdot 51=$$

$$\frac{0.5\cdot 0.5^{49}}{0.5\cdot 0.5^{49}+0.5\cdot 0.5^{50}}\cdot 50+\frac{0.5\cdot 0.5^{50}}{0.5\cdot 0.5^{49}+0.5\cdot 0.5^{50}}\cdot 51=50.333\cdots$$

הערה

אם משתנה מקבל ערכים שבין 50 ל 51 אז התוחלת שלו צריכה להיות בין 50 ל 51.

במקרה זה המשתנה המותנה מקבל ערכים שבין 50 ל 51 ולכן תוחלתו חייבת להיות בתחום זה.

ב.

$$P(X \geq 100, Z \geq 100) = P(X \geq 100) = 0.5^{99}$$
$$P(Z \geq 100) \geq P(Y \geq 100) = 0.9^{99}$$

לכן $P(X \geq 100 | Z \geq 100) \leq \frac{0.5^{99}}{0.9^{99}}$ שזהו מספר קרוב מאוד לאפס.

אם המשתנה הראשון הוא לא הגורם לכך שהמכסימום גדול או שווה ל 100 אז אין כל אינדיקציה לגביו והתוחלת המותנה שלו וזו שווה לתוחלת המקורית שלו שהיא 2.

מכיון שההסתברות שהוא כן הגורם היא קטנה מאוד אז התוחלת המותנה קרובה מאוד ל 2.

<u>הערה</u>

אם מתקיים $(X \geq 100)$ אז לפי תכונת חוסר הזכרון של משתנה גיאומטרי, התוחלת שלו היא $\frac{1}{0.5} + 100$. אבל כאמור הסיכוי שזה קורה כאן הוא קטן מאוד.

שלומי