

בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר לכל תלמיד להשתמש בשני דפי A4 הכתובים משני הצדדים. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים.
אסור להשתמש במחשבי כיס.
בבחינה יש 4 שאלות. ענו על כל השאלות.
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.
ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
אנא, השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

שאלה 1 (10 נקודות)

יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הסתברות מצטברת המקיימת:
 $F_X(x) = 0$ עבור $x < 0$, $F_X(x) = 1 - e^{-2x}$, עבור $x \geq 0$.
יהי $Y = 2X$ משתנה מקרי המקיים $Y = 2X$.
מצאו את פונקציית ההסתברות המצטברת של המשתנה Y .

שאלה 2 (50 נקודות)

נתונים 2020 תאים המסודרים משמאל לימין. מחלקים 117 כדורים בין תאים אלה. כל כדור נכנס לתא אחד בדיוק. לכל כדור יש סיכוי שווה להיכנס לכל אחד מהתאים, וזאת באופן ב"ת בכדורים האחרים.
תא נקרא פנוי אם אף כדור לא נכנס אליו. תא נקרא תפוס אם לפחות כדור אחד נכנס אליו.

- א. מהי ההסתברות שיהיה בדיוק תא תפוס אחד?
 - ב. מהי ההסתברות שיהיו בדיוק שני תאים תפוסים?
 - ג. מהי ההסתברות שהתא ה-135 משמאל יהיה התא הימני ביותר התפוס?
 - ד. מהי תוחלת מספר התאים הפנויים?
 - ה. מהי שונות מספר התאים הפנויים?
-

שאלה 3 (30 נקודות)

מבצעים סדרת הטלות ב"ת של מטבע שנופל על "עץ" בסיכוי 0.9 ונופל על "פלי" בסיכוי 0.1 . כל הטלה החל מההטלה השנייה נקראת מהפך אם תוצאתה שונה מתוצאת הקודמת לה. כך למשל ההטלה השביעית היא מהפך אם ורק אם תוצאתה שונה מתוצאת ההטלה הששית.

- א.** מהי ההסתברות שכל ההטלות החל מההטלה השנייה עד וכולל ההטלה ה 81 יהיו מהפך ?
- ב.** מהי ההסתברות שעד וכולל ההטלה ה 93 מספר המהפכים יהיה זוגי ?
- ג.** מהי ההסתברות שההטלה התשיעית היא מהפך בהינתן שההטלה השמינית היא מהפך ?
-

שאלה 4 (20 נקודות)

יהיו X, Y זוג משתנים מקריים ב"ת. נניח ש $X \sim G(0.5)$, $Y \sim G(0.1)$.
יהי $Z = \max\{X, Y\}$ (המשתנה Z מקבל את הערך ששווה לערך המכסימלי שמקבלים המשתנים X, Y).

- א.** מהו $E(X|50 \leq X \leq 51)$? (מדובר על תוחלת מותנה).
- ב.** מהו בקירוב $E(X|Z \geq 100)$? (מדובר על תוחלת מותנה).
-