# **פתרון מקוצר לבחינה מ 12.03.10**

## **שאלה 1**

**א.**

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | $P_X$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$ | 0 | $\frac{3}{8}$ |
| 1 | 0 | $\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}$ | $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}$ | $\frac{5}{8}$ |
| $P_Y$ | $\frac{6}{56}$ | $\frac{30}{56}$ | $\frac{20}{56}$ | |

**ב.** $Y \sim HG(2;5,3)$ לכן תוחלתו היא $2\cdot\frac{5}{8}$.

או לפי הסבר אחר: $Y$ הוא סכום של שני אינדיקטורים שלכל אחד מהם יש תוחלת $\frac{5}{8}$.

---

## **שאלה 2**

**א.**

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)+p^5$$

**ב.** יהי $A$ המאורע שגיא מצא את החשוד אשם.
יהי $B$ המאורע שהחשוד הורשע.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{p\binom{4}{2}p^2(1-p)^2+p\binom{4}{3}p^3(1-p)+p\binom{4}{4}p^4}{\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)+p^5}$$

( אם גיא מצא את החשוד אשם, אז בשביל הרשעה צריך שלפחות עוד שני שופטים ימצאו את החשוד אשם ).

<u>בדרך שניה:</u>
אם $i$ שופטים מצאו את החשוד אשם, אז משיקולי סימטריה נקבל שההסתברות שגיא הוא בינהם היא $\frac{i}{5}$. לכן נקבל שההסתברות המבוקשת היא:

$$\frac{\binom{5}{3}p^3(1-p)^2}{\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)+p^5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\binom{5}{4}p^4(1-p)}{\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)+p^5}\cdot\frac{4}{5}+$$

$$+\frac{p^5}{\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)+p^5}\cdot 1$$

**ג.** אם אף אחד לא מצא את החשוד אשם או כולם מצאו את החשוד אשם, אז קבוצת הרוב היא בגודל 5, אם אחד או ארבעה מצאו את החשוד אשם אז קבוצת הרוב היא בגודל 4 ואם שניים או שלושה מצאו את החשוד אשם אז קבוצת הרוב היא בגודל 3.
תוחלת גודל קבוצת הרוב היא:

$$\left[p^5+(1-p)^5\right]\cdot 5+\left[\binom{5}{4}p^4(1-p)+\binom{5}{1}p(1-p)^4\right]\cdot 4+$$

$$+\left[\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{2}p^2(1-p)^3\right]\cdot 3$$

**ד.**

$$p\left[\binom{3}{1}p(1-p)^2+\binom{3}{2}p^2(1-p)+\binom{3}{3}p^3\right]+(1-p)p^3$$

<u>הסבר</u>: אם מיכל ועדי מצאו את החשוד אשם אז יש צורך בלפחות עוד שופט אחד שימצא את החשוד אשם. אם מיכל ועדי לא מצאו את החשוד אשם אז יש צורך שכל האחרים ימצאו אותו אשם.

---

## <u>שאלה 3</u>

כל מספר מופיע פעם אחת בדיוק בהסתברות $\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ . זאת היא התוחלת של כל אחד משישה אינדיקטורים. תוחלת הסכום של האינדיקטורים היא $6\cdot\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

---

## <u>שאלה 4</u>

אם $b=6$ אז $P(D)=\frac{2}{6}$ , $P(A)=\frac{3}{6}$ , $P(A\cap D)=\frac{1}{6}$ ומתקיים $P(A\cap D)=P(A)P(D)$ והמאורעות הם ב"ת.

אם $b=5$ אז $P(A)=\frac{2}{5}$ , $P(D)=\frac{1}{5}$ , $P(A\cap D)=0\neq P(A)P(D)$ והמאורעות הם תלויים.

---

**<u>שאלה 5</u>**

$$P(X \quad even)=\sum_{k=0}^{\infty} pq^{2k+1}=q\sum_{k=0}^{\infty} pq^{2k}=qP(X \quad odd)<P(X \quad odd)$$

לכן עבור כל פרמטר $0<p<1$ ההסתברות לקבלת ערך זוגי היא קטנה מחצי.

---

**<u>שאלה 6</u>**

יהי $X$ - המספר הממוקם במקום השמאלי ביותר.

יהי $Y$ - סכום חמשת המספרים האחרים.

מתקיים בהכרח $X+Y=1+2+3+4+5+6=21$ , לכן $Y=21-X$ .

$$V(Y)=V(21-X)=V(X)\overset{*}{=}\frac{(6-1+1)^2-1}{12}=\frac{35}{12}$$

* לפי הנוסחא לחישוב שונות של משתנה אחיד.

<u>הערה</u>: ניתן גם לקבל את השונות של $X$ לפי:

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)-\left(\frac{1+6}{2}\right)^2$$

---

שלומי