פתרון למבחן מ 11.9.20

שאלה 1

א. יש $\binom{5}{3} = 10$ קבוצות של 3 אנשים. לכן לא יכולים להיות יותר מ 10 משולשים.
אם כולם מכירים אחד את השני אז יש $\binom{5}{3} = 10$ משולשים.
הערה
גם אם אף אחד לא מכיר אף אחד אז יש 10 משולשים.

ב. כל קבוצה של 3 אנשים היא משולש בסיכוי $\frac{1}{4} = 2 \cdot 0.5^3$ (כל השלושה מכירים או כולם לא מכירים). לכן, כל קבוצה היא אינדיקטור בעל הסתברות $\frac{1}{4}$. לפי המשפט שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות, התוחלת המבוקשת היא $\frac{10}{4}$.

ג. בגלל שכל זוג מכיר אחד את השני בסיכוי חצי ושיש אי תלות בין זוגות, אז התוחלת בהינתן שהודל וארדילס מכירים אחד את השני שווה לתוחלת בהינתן שהם לא מכירים אחד את השני. לפי עקרון התוחלת השלמה כל אחת מהן שווה לתוחלת המקורית שהיא $\frac{10}{4}$.

ד. יהי E – התוחלת המותנה המבוקשת.
יש $\binom{5}{2} = 10$ זוגות של אנשים. בסיכוי 0.5^{10} אין אף זוג שמכיר אחד את השני.
במקרה כזה יש $\binom{5}{3} = 10$ משולשים. לפי עקרון התוחלת השלמה מתקיים

$$0.5^{10} \cdot 10 + (1 - 0.5^{10})E = \frac{10}{4}$$

מכאן ניתן לחלץ את E.
הערות
אם ידוע שיש זוג שמכיר אחד את השני, זה פוסל רק את האפשרות שכולם לא מכירים את כולם. לכן זה מגדיל את ההסתברות שיש שמכירים וגם יש שלא מכירים. לעומת זאת, המאורע ששניים מסוימים מכירים אחד את השני, לא משנה את הסיכוי שיש משני הסוגים.

ה. כל קבוצה של שלושה היא אינדיקטור בעל איזושהי הסתברות p ושונות $p(1-p)$.
עבור כל $0 \le p \le 1$ מתקיים $p(1-p) \le 0.25$. עבור כל זוג אינדיקטורים X, Y מתקיים $0 \le \mathrm{V}(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X,Y)$. לכן עבור כל זוג של אינדיקטורים מתקיים $Cov(X,Y) \le 0.25$. יש 10 שלשות ויש $\binom{10}{2}=45$ זוגות של משולשים. לכן שונות הסכום לא גדולה מ $10 \cdot 0.25 + 2 \cdot 45 \cdot 0.25 = 25$.
הערה
ניתן גם להוכיח שמשתנה שמקבל רק ערכים בין 0 ל 10 לא יכולה להיות שונות גדולה מ 25.

<u>שאלה 2</u>

כן.

משתנה $Bin(2,0.5)$ מקבל את הערך 0 בסיכוי רבע, את הערך 1 בסיכוי חצי ואת הערך 2 בסיכוי רבע. ניתן לממש אותו למשל על-ידי מרחב מדגם שבו נקודה אחת בעלת הסתברות חצי וארבע נקודות בעלות הסתברות שמינית כל אחת. לערך 1 תיוחס הנקודה בעלת הסתברות חצי, ולכל אחד מהערכים 0 ו 2 ייוחסו של נקודות בעלות הסתברות שמינית.

<u>שאלה 3</u>

כן.

פונקצית ההסתברות המצטברת של משתנה $Bin(2,0.5)$ היא

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ 0.25 & 0 \le a < 1 \\ 0.75 & 1 \le a < 2 \\ 1 & 2 \le a \end{cases}$$

נתן פונקצית צפיפות של משתנה שיש לו את אותה הסתברות מצטברת בכל השלמים. פונקצית הצפיפות תהיה שווה ל 1 בקטעים $(-.25,0)$, $(0.5,1)$ ו $(1.75,2)$ ותהיה שווה לאפס בכל נקודה אחרת.

<u>שאלה 4</u>

בזוג הטלות מתקבל סכום 11 אם באחת ההטלות מתקבלת תוצאת 5 ובאחרת מתקבלת תוצאת 6. הסיכוי לכך הוא $\frac{1}{18} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2$.

הסיכוי שאף אחד לא יקבל סכום 11 הוא $\left(1 - \frac{1}{18}\right)^{20}$.

<u>שאלה 5</u>

החוק החלש חל על הסדרה.

בין אם מוציאים את הכדורים עם החזרה או בלי החזרה, תוחלת מספר הכדורים הכחולים שמוציאים בכל יום היא $2 \cdot \frac{4}{4+3}$ (כתוחלות של סכום אינדיקטורים או כתוחלות של משתנים בינומים והפרגאומטרים). בהינתן כל אחד מהמקרים יש סדרת משתנים ב"ת, שווי התפלגות ובעלי שונות סופית. לכן בכל אחד מהמקרים חל החוק החלש, וההסתברות שהממוצע יסטה מהתוחלת ביותר מקבוע נתון לאחר n נסיונות שואפת לאפס.

<u>הערות</u>

סדרת המשתנים אינה סדרת משתנים ב"ת. יש כאן דוגמא לסדרת משתנים תלויים שחל עליה החוק החלש.

שאלה 6

א. בוחרים 80 מספרים מבין המספרים הטבעיים שבין 1 ל 100. כל גורם 2 וגורם 5 יוצרים אפס נוסף בסוף המכפלה. מספר האפסים שבסוף המכפלה שווה למינמום שבין מספר גורמי ה 2 ומספר גורמי ה 5. בתחום יש רק 20 מספרים שמתחלקים ב 5 שמתוכם ארבעה (25,50,75,100) מתחלקים פעמיים ב 5. לכן לא יכולים להיות יותר מ 24 גורמי 5. חייבים לבחור לפחות 30 מספרים זוגיים. לכן בכל מקרה יהיו פחות גורמי 5 מגורמי 2. לכן מספר האפסים שווה למספר גורמי ה 5. כל מספר הוא בעל שני גורמי 5 בסיכוי $\frac{4}{100}$ ובעל גורם 5 אחד בסיכוי $\frac{16}{100}$. לכן תוחלת מספר גורמי ה 5 של מספר בודד היא $\frac{24}{100}$. מכיון שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות אז תוחלת מספר האפסים של המכפלה היא $80 \cdot \frac{24}{100}$.

ב. בסיכוי $\frac{80}{101} = \frac{\binom{1}{1}\binom{100}{79}}{\binom{100}{80}}$ המספר 0 יבחר, המכפלה תהיה שווה ל 0 ומספר האפסים שבסוף המכפלה יהיה 1.

בסיכוי $\frac{21}{101}$ המספר 0 לא יבחר והתוחלת תהיה שווה ל $80 \cdot \frac{24}{100}$.

התוחלת השלמה היא $\frac{80}{101} \cdot 1 + \frac{21}{101} \cdot 80 \cdot \frac{24}{100}$.

שלומי