פתרון מקוצר לבחינה מ 11/03/11

שאלה 1

א

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k)=\sum_{k=1}^{\infty} pq^{2k-1}=\frac{pq}{1-q^2}=\frac{0.25}{1-0.25}=\frac{1}{3}$$

ב

$$P(Y>X)=P(Y=2,X=1)+P(Y=3,X=1)+P(Y=3,X=2)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 0.5+\frac{1}{3}\cdot 0.5+\frac{1}{3}\cdot 0.5^2$$

ג לפי האי תלות המשתנים הם בלתי מתואמים ולכן $E(XY)=E(X)E(Y)$ כאשר $E(X)=\frac{1}{0.5}=2$ ו $E(Y)=\frac{1+3}{2}=2$.

שאלה 2

א

$$p=\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18}+\frac{8}{19}\cdot\frac{7}{18}\overset{also}{=}\frac{\binom{11}{2}+\binom{8}{2}}{\binom{19}{2}}\overset{also}{=}\frac{\binom{2}{2}\binom{19-2}{9}+\binom{19-2}{11}}{\binom{19}{11}}$$

ב בהסתברות p של סעיף א' שני הפגומים יהיו באותו סל וכך רק בסל אחד יהיה תפוז פגום.
בהסתברות $1-p$ בשני הסלים יהיה פגום. לכן התוחלת היא $p\cdot 1+(1-p)2$.

<u>פתרון בדרך נוספת</u>: בסל הראשון יהיה לפחות תפוז פגום אחד בסיכוי $1-\frac{8}{19}\cdot\frac{7}{18}$. זו התוחלת של אינדיקטור אחד. תוחלת האינדיקטור שבסל השני יהיה לפחות כדור אחד היא $1-\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18}$.
תוחלת מספר הסלים שבהם יהיה לפחות פגום אחד שווה לסכום התוחלות של אינדיקטורים אלה.

שאלה 3

א $0.5\cdot 0.5+0.5\cdot 0.8$

ב $0.5\cdot 0.5^3+0.5\cdot 0.8^3$

ג <u>גישה ראשונה</u>:
אם בכל שלושת ההטלות הראשונות קבלנו "עץ" אז ההסתברות המותנה שמדובר במטבע הראשון היא $p=\frac{0.5\cdot 0.5^3}{0.5\cdot 0.5^3+0.5\cdot 0.8^3}$ וההסתברות שמדובר במטבע השני היא $1-p$.
כעת ההסתברות שנקבל בשתי ההטלות הבאות שני עצים היא $p\cdot 0.5^2+(1-p)\cdot 0.8^2$.

גישה שניה:

A- קבלת 3 עצים בשלושת ההטלות הראשונות

B- קבלת שני עצים בהטלות הרביעית והחמישית

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.5\cdot 0.5^3\cdot 0.5^2+0.5\cdot 0.8^3\cdot 0.8^2}{0.5\cdot 0.5^3+0.5\cdot 0.8^3}$$

ד ההסתברות לכך היא 0. בשביל שזה יקרה, צריך שעבור כל n טבעי ההטלה ה $2n+2$ תהיה בעלת תוצאה שונה מההטלה ה $2n+1$ (צריך למשל שיהיה שיוויון בין מספר ה"עץ" למספר ה"פלי" גם לאחר 100 הטלות וגם לאחר 102 הטלות, אם יש שיוויון לאחר 100 הטלות, אז יש בדיוק 50 "עץ", אם במצב הזה יבואו שתי הטלות זהות, אז לא יהיה שיויון לאחר 102 הטלות). בפעם בודדת ההסתברות לכך היא $2\cdot 0.5\cdot 0.5=0.5$ אם מדובר במטבע הראשון ו $2\cdot 0.8\cdot 0.2=0.32$ אם מדובר במטבע השני. ההסתברות שזה יקרה בכל n הזוגות הראשונים האלה היא קטנה מ 0.5^n. כך עבור כל n טבעי. לכן ההסתברות המבוקשת שווה ל 0.

הערה

אין לבלבל עם ההסתברות לשיוויון לאחר $2n$ הטלות כאשר n הוא קבוע מסוים. למאורע זה יש הסתברות $\binom{2n}{n}0.5^n 0.5^n$.

שאלה 4

נגדיר משתנה המקיים $P(X=3)=P(X=7)=0.5$.

מתקיים $E(X)=5$ ו $V(X)=0.5(3-5)^2+0.5(7-5)^2=4$.

דוגמא אחרת היא משתנה $B\left(25,\frac{1}{5}\right)$. כך התוחלת היא $25\cdot\frac{1}{5}$ והשונות היא $25\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}$.

שאלה 5

נראה שלא קיים משתנה כזה.

משתנה המקיים $P(X>1)=1$ מקיים גם $P(X\geq 0)=1$. זהו משתנה אי שלילי. לכן לפי אי שיוויון מרקוב מתקיים $P(X=8)\leq P(X\geq 8)\overset{Markov}{\leq}\frac{E(X)}{8}=\frac{2}{8}<0.5$.

שלומי