פתרון מקוצר לבחינה מ 09/02/10

שאלה 1

א.

$X \backslash Y$	0	1	2	P_X
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{2}$
P_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

ב.

$Y-X$ זה מספר תוצאות ה"עץ" בהטלה השניה. לכן התוחלת היא $\frac{1}{2}$.

שאלה 2

א. $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$ (בדיוק צעד אחד ימינה וצעד אחד שמאלה)

ב. $\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\frac{1}{3}+\binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5$ (3 או 4 או 5 צעדים ימינה)

ג. A - ימינה מהראשית לאחר חמישה צעדים.
B - ימינה מהראשית לאחר שלושה צעדים.
C - בנקודה 1 לאחר שלושה צעדים.
D - בנקודה 3 לאחר שלושה צעדים.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap C)+P(A\cap D)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(C)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)+P(D)\cdot 1}{P(B)}=\frac{\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 1}{\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

<u>פתרון בדרך שניה:</u>

אם בשלב השלישי הוא ימינה מהנקודה 0 אז בהסתברות $a=\dfrac{\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}}{\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3}$ הוא בנקודה

1 ובהסתברות המשלימה $b=\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3}$ הוא יהיה בנקודה 3.

ההסתברות המבוקשת היא $\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)a+b$

<u>ד</u>. $\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot|3|+\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}\cdot|1|+\binom{3}{1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot|-1|+\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot|-3|$

כאשר $|\;|$ מסמן ערך מוחלט של מספר.

<u>שאלה 3</u>

מבוקשת ההסתברות שמתקבלות 0 או 2 הצלחות.

$$[(1-0.5)(1-0.5)(1-0.8)]+[0.5\cdot 0.5(1-0.8)+0.5(1-0.5)0.8+(1-0.5)0.5\cdot 0.8]=0.5$$

השתמשנו בהנחת האי תלות בכך שחישבנו את הסתברויות החיתוך כמכפלת ההסתברויות. אם למשל שני המטבעות הראשונים היו אותו מטבע, אז הם בכל מקרה היו נותנים ביחד 0 או 2 הצלחות והיה צריך להתקבל כשלון בהטלה השלישית וזה קורה בסיכוי $1-0.8=0.2$.

<u>הערה</u>: כאשר מבצעים הטלות ב"ת של מטבעות, אז תנאי מספיק (ולא הכרחי) לכך שנקבל מספר זוגי של הצלחות הוא שלפחות אחד המטבעות הוא הוגן.

<u>שאלה 4</u>

<u>א</u>. תוחלת הסכום של 4 אינדיקטורים שווה לסכום התוחלות שלהם.

כל הטלה היא גבוהה ממש מהקודמת לה בסיכוי $\dfrac{1-\frac{6}{36}}{2}=\dfrac{15}{36}$

או בדרך אחרת: $\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$

תוחלת הסכום היא $4\cdot\frac{15}{36}=\frac{5}{3}$

<u>ב</u>. הם בלתי תלויים. X_6 תלוי רק בתוצאות ההטלות החמישית והשישית. X_8 תלוי רק בתוצאות ההטלות השביעית והשמינית.

<u>ג</u>. צריך ש 5 פעמים יהיה שיפור. זה קורה רק אם מתקבלת הסדרה 1,2,3,4,5,6 לפי סדר זה.

ההסתברות לכך היא $\left(\frac{1}{6}\right)^6$.

<u>שאלה 5</u>

ב 3 הטלות לא יכולות להתקבל יותר מ 3 תוצאות שונות. לכן לפחות אחד מהמשתנים חייב לקבל את הערך 0. לכן המכפלה שווה בוודאות ל 0. המכפלה היא משתנה מנוון ולכן שונותה היא 0.

משתנה מנוון הוא משתנה שמקבל ערך אחד מסוים ידוע מראש. הוא בכל מקרה לא סוטה מערך זה. לכן ממוצע ריבועי הסטיות מהערך הזה, שהוא התוחלת, הוא אפס. לכן לפי הגדרת השונות, השונות היא אפס במקרה זה. לא השתמשנו בהנחת האי תלות או בכך שהקוביה תקינה. בכל מקרה לא יכולות להתקבל יותר מ 3 תוצאות שונות ב 3 נסיונות.

שלומי