

בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר לכל תלמיד להשתמש בדף A4 אחד הכתוב משני צדדיו. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים.
מותר להשתמש במחשב כיס.
בבחינה יש 5 שאלות. ענו על כל השאלות.
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.
ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
אנא, השאירו את העמוד הראשון של מחברת הבחינה ריק.
נמקו את תשובותיכם.

בהצלחה !

שאלה 1 (20 נקודות)

מבצעים הטלות ב"ת של מטבע הוגן.
יהי X - משתנה אינדיקטורי שמקבל את הערך 1 אם ההטלה הראשונה היא של "עץ" ומקבל את הערך 0 אם ההטלה הראשונה היא של "פלי".
יהי Y - מספר התוצאות "עץ" בשתי הטלות הראשונות.

- א. מצאו את ההתפלגות המשותפת של X ו Y .
ב. מצאו $E(Y - X)$.

שאלה 2 (40 נקודות)

שיכור מבצע הילוך מקרי על קבוצת השלמים. הוא מתחיל בזמן 0 בנקודה 0 ועושה בכל שלב צעד אחד ימינה בסיכוי $\frac{2}{3}$, או צעד אחד שמאלה בסיכוי $\frac{1}{3}$.
(כל הטבעיים $\{1, 2, 3, \dots\}$ הם ימינה לאפס.)

- א. מהי ההסתברות שלאחר שני שלבים הוא שוב יהיה בנקודה 0 ?
ב. מהי ההסתברות שבשלב 5 הוא יהיה ימינה מהנקודה 0 ?
ג. מהי ההסתברות שבשלב 5 הוא יהיה ימינה מהנקודה 0 בהינתן שבשלב 3 הוא היה ימינה מהנקודה 0 ?
ד. מהי תוחלת המרחק שלו מהנקודה 0 לאחר 3 שלבים ?
(למשל המרחק של הנקודות 3 או 3 - מהנקודה 0 הוא 3.)

שאלה 3 (10 נקודות)

מטילים 3 מטבעות. בראשון הסיכוי ל"עץ" הוא 0.5, בשני הסיכוי ל"עץ" הוא 0.5 ובשלישי הסיכוי ל"עץ" הוא 0.8. תוצאות שלושת ההטלות הן בלתי תלויות.
מהי ההסתברות שנקבל בסך הכל מספר זוגי של תוצאות "עץ" ? האם השתמשתם בהנחת האי-תלות ?

שאלה 4 (30 נקודות)

מבצעים סדרת הטלות בלתי תלויות של קוביה תקינה. הטלה נקראת "שיפור" אם מושגת בה תוצאה הגבוהה ממש מאשר בהטלה שקדמה לה (למשל אם בהטלה השביעית התקבלה התוצאה 4, אז ההטלה השמינית היא שיפור אם"ם מתקבלת בה תוצאה 5 או 6).
עבור $i, 2 \leq i < \infty$ נגדיר משתנה אינדיקטורי X_i המציין שהטלה i היא שיפור.

א. מצאו את תוחלת המספר הכולל של שיפורים בארבע ההטלות $\{6,7,8,9\}$.

ב. האם המשתנים X_6 ו X_8 הם משתנים בלתי תלויים?

ג. מהו $P(X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1, X_5 = 1, X_6 = 1)$?

שאלה 5 (10 נקודות)

מבצעים 3 הטלות בלתי תלויות של קוביה תקינה.

יהי X - מספר הפעמים שמתקבלת התוצאה 1.

יהי Y - מספר הפעמים שמתקבלת התוצאה 2.

יהי Z - מספר הפעמים שמתקבלת התוצאה 3.

יהי W - מספר הפעמים שמתקבלת התוצאה 4.

מצאו $V(XYZW)$ (השונות של המכפלה של המשתנים).

האם השתמשתם בהנחת האי-תלות? האם השתמשתם בהנחה שהקוביה תקינה?
