פתרון מקוצר לבחינה מ 08/03/13

שאלה 1

א. הסכום מתפלג $Bin\left(3,\frac{1}{2}\right)$. ההסתברות שהסכום הוא 1 היא $\binom{3}{1}0.5\cdot 0.5^2$.

ב. למדנו שבהטלות ב"ת שלפחות אחת מהן היא הוגנת, הסכום הוא זוגי בסכוי 0.5 .
כאן כל ההטלות הן הוגנות, ולכן הסכוי הוא 0.5 .
בדרך אחרת, הסכוי הוא $\binom{5}{4}0.5^4 0.5+\binom{5}{2}0.5^2 0.5^3+0.5^5$

ג. זהו הסכוי ש $(X_5=1)$ ו $(X_1=X_2=X_3=X_4=0)$. בגלל אי התלות ההסתברות לכך היא $0.5^4 0.5$.

ד. $X=X_1+X_2$ מתפלג $Bin\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

לכן $E^2(X)=\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^2=1$ ו $V(X)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0.5$.

מתקים $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$ ולכן כאן $E(X^2)=V(X)+E^2(X)=0.5+1=1.5$

או <u>בדרך שניה</u>

$$E\left((X_1+X_2)^2\right)=E\left(X_1^{\,2}\right)+E\left(X_2^{\,2}\right)+2E(X_1X_2)\overset{*}{=}2E\left(X_1^{\,2}\right)+2E(X_1)E(X_2)=$$
$$=2\cdot 0.5\cdot 1^2+2\cdot 0.5\cdot 0.5$$

* בגלל ש X_1 ו X_2 ב"ת אז $E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$

או <u>בדרך שלישית</u>

$$E\left((X_1+X_2)^2\right)=0.5\cdot 0.5\cdot 0^2+2\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 1^2+0.5\cdot 0.5\cdot 2^2$$

שאלה 2

א.
$$\frac{365\cdot 364\cdot 363}{365^3}$$

ב. ביום מסוים מימות השנה נולד לפחות אחד מהם בסכוי $1-\left(\frac{364}{365}\right)^3$.

זו התוחלת של האינדיקטורים של הימים השונים. לכן תוחלת סכום האינדיקטורים היא
$365\left[1-\left(\frac{364}{365}\right)^3\right]$.

<u>פתרון נכון אך פחות טוב</u> שלא מתאים למספרים גדולים הוא לפי ההתפלגות:
X - מספר הימים האלה

$$E(X)=P(X=1)\cdot 1+P(X=2)\cdot 2+P(X=3)\cdot 3$$

כאשר את $P(X=3)$ חישבנו בסעיף א', $P(X=1)=\frac{365}{365^3}=\frac{1}{365^2}$

ו $P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)$.

<u>שאלה 3</u>

<u>**א**</u>. $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (או שהראשון זוגי והשני אי זוגי או להפך)

<u>**ב**</u>. X - מספר ההטלות

עבור $k\ge 2$ שלם: $P(X=k)=\left(\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{3}{6}+\left(\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{3}{6}$ (האחרון מסוג שונה מקודמיו)

<u>**ג**</u>. אחרי ההטלה הראשונה, מחכים לתוצאה שונה מהראשונה. התפלגות מספר ההטלות לאחר הראשונה היא $G\left(\frac{3}{6}\right)$ ולכן בעלת תוחלת $\frac{6}{3}=2$. לכן תוחלת מספר ההטלות כולל הראשונה היא 3.

<u>**ד**</u>. המתאם גדול מ -1 וקטן מ 1.

כדי שיהיה מתאם -1 או 1, צריך קשר לינארי בין משתנים. אבל, כאן אין קשר לינארי: למשל יתכן שמשתנה אחד יקבל ערך 1 ומשתנה אחר יקבל ערך 1, יתכן שמשתנה אחד יקבל ערך1 ומשתנה אחר יקבל ערך 2 ויתכן שמשתנה אחד יקבל ערך 7 ומשתנה אחר יקבל ערך 1.

<u>הערה</u>:

המתאם גם אינו שווה לאפס. המתאם הוא שלילי. כל אחד מהמשתנים מקבל ערך של לפחות 1. אם משתנה מקבל ערך של 1 אז האחר יכול לקבל ערך גדול יותר מ 1. אם משתנה מקבל ערך גדול מ 1, אז האחר יכול לקבל רק את הערך 1.

<u>**ה**</u>. הסכוי הוא $\frac{1}{4}=\frac{1}{1+3}$: לאחר קבלת התוצאה הראשונה, צריך שהראשונה מבין $1+3=4$ תוצאות מיוחדות תהיה, התוצאה הראשונה.

<u>פתרון בדרך אחרת</u>:

יהי a - הסכוי המבוקש. מתקים $a=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{3}{6}\cdot 0+\frac{2}{6}a$.

הסבר: מתנים במה שקורה בהטלה השניה. בסכוי $\frac{1}{6}$ כבר היא חוזרת על הראשונה, בסכוי $\frac{3}{6}$ מתקבלת בה תוצאה מהסוג האחר ואז כבר לא נתקל בפעם השניה בתוצאה הראשונה ובסכוי $\frac{2}{6}$ מתקבלת תוצאה שלא גורמת להכרעה ומשאירה את הסכוי כפי שהיה.

שלומי