פתרון לבחינה מ 08.02.18

<u>שאלה 1</u>

<u>א</u>.

$$Z=9)=P(X=3,Y=6)+P(X=4,Y=5)+P(X=5,Y=4)+P(X=6,Y=3)=$$

$$P(X=3)P(Y=6)+P(X=4)P(Y=5)+P(X=5)P(Y=4)+P(X=6)P(Y=3)=\frac{4}{36}$$

<u>ב</u>.

$$P(B\mid Z\geq 10)=\frac{P(B,Z\geq 10)}{P(Z\geq 10)}=\frac{P(Z=10)}{P(Z=10)+P(Z=11)+P(Z=12)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}}$$

<u>ג</u>. הסיכוי הוא חצי. אם תוצאת ההטלה הראשונה היא אי זוגית, אז צריך תוצאה אי זוגית בהטלה השניה. אם תוצאת ההטלה הראשונה היא זוגית, אז צריך תוצאה זוגית בהטלה השניה. בכל מקרה הסיכוי הוא חצי.

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>. ההתפלגות היא גיאומטרית עם פרמטר $1-(1-0.8)(1-0.8)=0.96$.
בכל שלב שעד אליו לא קבלנו הצלחה, הסיכוי לקבלת הצלחה הוא המשלים לכך שבשני המשתנים לא תתקבל הצלחה.
<u>פתרון בדרך שניה</u>
עבור כל ערך k טבעי מתקיים

$$P(Z>k)=P(X>k,Y>k)=P(X>k)P(Y>k)=0.2^k\cdot 0.2^k=0.04^k$$

$$P(Z=k)=P(Z>k-1)-P(Z>k)=0.04^{k-1}-0.04^k$$

$$=0.04^{k-1}(1-0.04)=0.96\cdot 0.04^{k-1}$$

לכן $Z\sim G(0.96)$.

<u>ב</u>. יכולים להתקבל הערכים 1 או 2 או 3.

$$P(Z=1\mid X=3)=P(Y=1)=0.8$$

$$P(Z=2\mid X=3)=P(Y=2)=0.2\cdot 0.8$$

$$P(Z=3\mid X=3)=P(Y\geq 3)=0.2^2$$

כדי שהמינימום יקבל את הערך 3, אסור ל Y לקבל ערך קטן מ 3. כדי שזה יקרה צריך שיהיו שני כשלונות במשתנה Y. אם יש שני כשלונות, אז בכל מקרה מתקבל ערך גדול מ 2.

<u>שאלה 3</u>

$$P(1<|X|<2)=P(1<X\le 2)+P(-2<X\le -1)=$$
$$=[P(X\le 2)-P(X<1)]+0=[(1-e^{-2\cdot 2})-(1-e^{-2\cdot 1})]=$$
$$=e^{-2}-e^{-4}$$

<u>הערה</u>

מדובר בהתפלגות רציפה ולכן ההסתברות של נקודות בודדות היא אפס ולכן לא משנה אם מחסירים ממנו או מוסיפים לו נקודת קצה.

<u>שאלה 4</u>

נפריך את הטענה באמצעות מתן דוגמא נגדית.

הדוגמא תהיה של סדרת משתנים בלתי תלויים שווי התפלגות שכל אחד מהם מקבל את הערך 2 בסיכוי $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ואת הערך 0 בסיכוי המשלים של $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

התוחלת של כל אחד מהמשתנים היא $\sqrt{2}$. מכיון שזו סדרה של משתנים ב"ת שווי התפלגות ובעלי שונות סופית, אז חל על הסדרה החוק החלש. לפי החוק החלש, ההסתברות שהממוצע רחוק ביותר מ $\varepsilon>0$ קבוע מהתוחלת שואפת לאפס כאשר מספר הנסיונות שואף לאין סוף.

<u>שאלה 5</u>

<u>א</u>. כדי שההתפלגות תהיה בינומית דרוש שמספר הבנים יהיה שווה ל 1. לא משנה לשם כך מהו מספר הבנות.
אם יש יותר מבן אחד, אז יש משחקים שבהם משתתפים שני בנים. במשחקים אלה חייב לנצח בן. לכן מספר הנצחונות של בנים לא יכול להיות שווה לאפס, בזמן שכל משתנה בינומי יכול לקבל את הערך 0.
אם יש רק בן אחד אז הוא משתתף בסדרת משחקים שבכל אחד מהם יש לו אותו סיכוי לנצח, ויש אי תלות בין תוצאות משחקיו.

<u>ב</u>. יש $10=\binom{5}{2}$ משחקים שבהם בודאי יש בן מנצח.
יש $5\cdot 10=50$ משחקים שבכל אחד מהם מנצח בן בסיכוי חצי.
לכן תוחלת מספר הנצחונות של בנים היא $10+50\cdot 0.5=35$.
<u>הערה</u>
השתמשנו בכך שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות גם כאשר המשתנים תלויים.

<u>ג</u>. אין כאן הנחה של אי תלות בין תוצאות המשחקים. נחלק את $5\cdot 10=50$ המשחקים שבין בנים לבנות לשתי קבוצות של 25 משחקים. בסיכוי חצי הבנים ינצחו את משחקי הקבוצה הראשונה ולא את משחקי הקבוצה השניה ובסיכוי של חצי הם ינצחו את משחקי הקבוצה השניה ולא את משחקי הקבוצה הראשונה. כמובן שבמשחקים שבהם משתתפים רק בנים יהיה תמיד בן מנצח. כך בכל מקרה מספר הנצחונות של בנים יהיה שווה ל $10+25=35$. כך מספר הנצחונות של בנים יהיה משתנה מנוון ולכן השונות שלו תהיה שווה לאפס.

<u>ד</u>. כאן יש $5\cdot 5=25$ משחקים בין בנים לבנות. אי אפשר לחלק 25 משחקים לשתי קבוצות שוות גודל כפי שנעשה בסעיף הקודם. כדי להביא את השונות (ממוצע רבועי הסטייה מהתוחלת) למינימום, צריך שמספר הנצחונות של בנים על בנות יהיה קרוב כמה שיותר לתוחלת שהיא 12.5 . זה קורה אם מספר הנצחונות של בנים יהיה שווה ל 12 או ל 13.

כדי שהתוחלת תהיה 12.5 צריך שכל אחד מהערכים האלה יתקבל בסיכוי חצי. כך בכל מקרה יש סטיה של 0.5 מהתוחלת, וממוצע רבועי הסטייה מהתוחלת שהוא השונות יהיה שווה ל 0.25 .

<u>הערה</u>

במשחקים שבין בנים לבנים יש תמיד מנצח בן. לכן הם רק מהווים תוספת של קבוע שלא משנה את השונות.

שלומי