פתרון מקוצר לבחינה מ 08/02/11

שאלה 1

א

$$\left(\frac{4}{4+2}\right)^2=\frac{4}{9}$$

ב

$$\frac{4\cdot 3}{6\cdot 5}=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{2}{5}$$

ג בין אם מוציאים עם החזרה או בלי החזרה, אז התוחלת היא $2\cdot\frac{4}{4+2}=\frac{4}{3}$ כתוחלת סכום של שני אינדיקטורים בעלי הסתברות $\frac{4}{4+2}$ להצלחה כל אחד. לכן לפי חישוב תוחלת שלמה, התוחלת היא $2\cdot\frac{4}{4+2}=\frac{4}{3}$.

לפי דרך נוספת: התוחלת שווה ל

$$\left(0.5\cdot 2\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+0.5\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}\right)\cdot 1+\left(0.5\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}+0.5\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}\right)\cdot 2.$$

ד יהי A - המאורע שהוצאנו עם החזרה.
יהי B - המאורע ששני הכדורים הראשונים הם כחולים.
יהי D - המאורע שהכדור השלישי הוא כחול.

פתרון בגישה ראשונה:

$$P(D\mid B)=P(A\mid B)P(D\mid A\cap B)+P(\bar{A}\mid B)P(D\mid \bar{A}\cap B)$$

כאשר מתקיימים: $P(A\mid B)=\frac{0.5\cdot\frac{4}{9}}{0.5\cdot\frac{4}{9}+0.5\cdot\frac{2}{5}}$ ו $P(\bar{A}\mid B)=1-P(A\mid B)$

ומתקיים $P(D\mid A\cap B)=\frac{4}{4+2}$ ו $P(D\mid \bar{A}\cap B)=\frac{4-2}{(4+2)-2}$ כי במקרה שאין החזרות חסרים כבר שני כדורים כחולים.

פתרון בגישה שניה:

$$P(D\mid B)=\frac{P(D\cap B)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^3+0.5\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4}}{0.5\cdot\frac{4}{9}+0.5\cdot\frac{2}{5}}$$

כאשר $D\cap B$ זה המאורע ששלושת הכדורים הם כחולים.

<u>שאלה 2</u>

א X הוא מספר תוצאות ה"עץ" בשתי הטלות ב"ת של מטבע מאוזן. ראינו שבהטלות ב"ת של מטבעות, די בכך שאחד המטבעות יהיה הוגן, כדי שהסכום יהיה זוגי בסיכוי 0.5 .

$$P(Y \text{ זוגי}) = P(Y=0)+P(Y=2) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3}$$

(אפשר היה לחשב את הסיכוי ש X זוגי באותה דרך).

ב בלי שום קשר לאי תלות, תמיד תוחלת סכום שווה לסכום התוחלות.

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}=2$$

ג

$$P(X>Y)=P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)\overset{1}{=}$$
$$=P(X=1)P(Y=0)+P(X=2)P(Y=0)+P(X=2)P(Y=1)=$$
$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

(1) הודות לאי תלות, הסתברות החיתוך שווה למכפלת ההסתברויות.

ד Z יכול לקבל כל ערך שלם אי שלילי. הוא יכול למשל לקבל את הערך 8. במקרה זה $Z-X-Y$ מקבל ערך גדול מ 2. Z יכול לקבל את הערך 0. במקרה זה $Z-X-Y$ מקבל ערך שלא גדול מ 0. לכן קבוצת הערכים ש $Z-X-Y$ יכול לקבל היא יותר ממספר אחד. לכן המשתנה אינו משתנה מנוון. יש סטיות מהתוחלת ולכן בכל מקרה השונות אינה אפס.

<u>שאלה 3</u>

א זה יכול לקרות רק אם הסדרה היא של תוצאות "6" במקומות האי זוגיים ותוצאות "5" במקומות הזוגיים או להפך. ההסתברות לכך היא $2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

ב זוג הטלות סמוכות מסתכם ב 11 אם באחת מהן התקבל "5" ובאחרת התקבל "6". זה קורה בסיכוי $2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$. יש כאן סכום של 9 אינדיקטורים שלכל אחד מהם יש תוחלת $\frac{1}{18}$. לכן תוחלת הסכום היא $9\cdot\frac{1}{18}=0.5$.

ג נסתכל על 9 אינדיקטורים שכל אחד מהם ייצג קבלת סכום 11 בשתי הטלות סמוכות.

לכל i : $V(X_i)=\frac{1}{18}\cdot\frac{17}{18}$.

עבור i,j שהם לא סמוכים מתקיים $Cov(X_i,X_j)=0$ כי אין תלות בינהם.

עבור X_i,X_{i+1} מתקיים

$$Cov(X_i,X_{i+1})=E(X_iX_{i+1})-E(X_i)E(X_{i+1})\overset{1}{=}2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{18}$$

(1) כדי שיתרחשו X_i וגם X_{i+1} צריך לקבל רצף 565 או רצף 656.

יש 9 אינדיקטורים ויש 8 זוגות של אינדיקטורים שכנים לכן

$$V(X)=9V(X_1)+2\cdot8Cov(X_1,X_2)$$

שלומי