<u>פתרון מקוצר לבחינה מ 05/02/14</u>

<u>שאלה 1</u>

<u>א</u>. מבוקשת ההסתברות של המאורע שבהוצאות ללא החזרה שני הכדורים הראשונים הם כחולים.

ההסתברות היא $\frac{1}{2} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} \stackrel{also}{=} \frac{3\cdot 2}{4\cdot 3}$

<u>ב</u>. נדרש או שאני רואה את סדרת ההטלות של אילה ושהכדור הראשון שאילה מוציאה הוא כחול, או שאני רואה את סדרת ההטלות של דפנה וכל אחת מבין אילה ודפנה מוציאה כדור ראשון כחול.

ההסתברות לכך היא $0.5\cdot\frac{3}{4} + 0.5\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$.

<u>הערה</u>: זוג המאורעות $(X_1 = 1)$ ו $(Z_1 = 1)$ הם תלויים ולכן הסתברות חיתוכם לא שווה למכפלת ההסתברויות שלהם.

<u>ג</u>. אילה מוציאה 4 כדורים ללא החזרה מכד שבו 4 כדורים. לכן היא בהכרח מוציאה את כל הכדורים. לכן היא בהכרח מוציאה 3 כדורים כחולים. לכן תוחלת מספר הכדורים הכחולים שהיא מוציאה היא 3.

הסבר נוסף הוא שכל כדור שאילה מוציאה הוא בסיכוי $\frac{3}{4}$ כחול. לכן כל אינדיקטור מקבל את הערך 1 בהסתברות $\frac{3}{4}$. מכיון שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות, אז תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות של האינדיקטורים שהיא $4\cdot\frac{3}{4} = 3$.

הסבר נוסף הוא שמספר הכדורים שאילה מוציאה מתפלג $HG(4;3,1)$ ולכן התוחלת היא $4\cdot\frac{3}{3+1}$.

<u>ד</u>. בשתי ההוצאות הראשונות שלה, אילה חייבת לקבל לפחות כדור כחול אחד. לכן, אם ידוע ש $(Z_1 + Z_2 = 0)$, אז בהסתברות 1, אני מסתכל על סדרת ההוצאות של דפנה.

בסדרת ההוצאות של דפנה, כל כדור הוא כחול בסיכוי $\frac{3}{4}$ באופן בלתי תלוי בהוצאות האחרות. לכן הסיכוי הוא $\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

<u>נתן גם הסבר אחר</u>

A - שני הראשונים שאני רואה הם ירוקים (זאת המשמעות של $(Z_1 + Z_2 = 0)$).

B - שני האחרונים שאני רואה הם כחולים (זאת המשמעות של $(Z_3 + Z_4 = 2)$).

מבוקש $P(B \mid A)$.

$$P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.5\cdot 0+0.5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{0.5\cdot 0+0.5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>. השונות של משתנה $Bin\left(3,\frac{1}{2}\right)$ היא $3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.

מתקיים $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$ ולכן $E(X^2)=V(X)+E^2(X)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(3\cdot\frac{1}{2}\right)^2$

<u>ב</u>. מתקיים $E(X^2)=P(X=0)\cdot 0^2+P(X=1)\cdot 1^2+P(X=2)\cdot 2^2+P(X=3)\cdot 3^2$

$$E(X^2)=0.5^3\cdot 0^2+\binom{3}{1}\cdot 0.5\cdot 0.5^2\cdot 1^2+\binom{3}{2}\cdot 0.5^2\cdot 0.5\cdot 2^2+0.5^3\cdot 3^2=3$$

<u>ג</u>. מתקיים $E(X)=1.5$ ולכן

$$P(X\ge E(X))=P(X>E(X))=P(X=2)+P(X=3)=\binom{3}{2}\cdot 0.5^3+0.5^3=0.5$$

<u>ד</u>. מתקיים $E(X^6)=P(X=0)\cdot 0^6+P(X=1)\cdot 1^6+P(X=2)\cdot 2^6+P(X=3)\cdot 3^6$

$$E(X^6)=0.5^3\cdot 0^6+\binom{3}{1}\cdot 0.5^3\cdot 1^6+\binom{3}{2}\cdot 0.5^3\cdot 2^6+0.5^3\cdot 3^6>0.5^3\cdot 3^6>80$$

אם $(X\le 2)$ אז $X^6\le 2^6<80$. אם $(X=3)$ אז $X^6=3^6>E(X^6)$ ולכן התשובה המבוקשת היא ההסתברות ש $(X=3)$ שהיא $0.5^3=\frac{1}{8}$.

(אם $(X=3)$, אז X^6 מקבל את ערכו המכסימלי האפשרי ולכן במקרה זה $(X^6\ge E(X^6))$).

<u>הערה</u>: בסעיף זה צריך להבחין שבדומה לכך שאין להניח ש $E(X^2)=E^2(X)$, כך אין להניח ש $E(X^6)=E^6(X)$. לכן, למרות שמתקיים לגבי משתנה אי שלילי $P(X\ge E(X))=P(X^6\ge E^6(X))$, לא בהכרח $P(X\ge E(X))=P(X^6\ge E(X^6))$.

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>. $P(Y=1)P(X<1)+P(Y=2)P(X<2)+P(Y=3)P(X<3)=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

<u>ב</u>. $P(X=3,Y=3)+P(X=4,Y=2)\overset{independent}{=}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

<u>ג</u>. $\frac{1}{2}$

אם $(X\ge 3)$ אז לא יתכן שיתקיים $(Y>X)$. מכיון ש $P(X\ge 3)=0.5$, אז לא יתכן שתתקבל הסתברות גבוהה מ $1-0.5=0.5$.

נראה שיתכן שיש הסתברות 0.5 :

די שיתקיים $P(X=1,Y=2)=\frac{1}{4}$, $P(X=2,Y=3)=\frac{1}{4}$. זה אפשרי (ניתן להשלים לטבלת התפלגות משותפת למשל על-ידי $P(X=3,Y=1)=\frac{1}{4}$ ו $P(X=4,Y=1)=P(X=4,Y=2)=P(X=4,Y=3)=\frac{1}{12}$).

הערה: מה שמנחה כאן בבחירת ההתפלגות המשותפת הוא שעבור הערך $(X=1)$ בוחרים ערך של Y שיהיה כמה שיותר קטן מבין הגדולים מ 1, זאת כדי לא לבזבז ערכים גדולים יותר שאותם נשמור כדי שיהיו יותר גדולים מ X כאשר $(X=2)$.

שלומי