פתרון לבחינה מ 04/02/16

שאלה 1

א.

$$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$P(Z=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=\frac{2}{12}$$

$$P(Z=4)=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=1)=\frac{3}{12}$$

$$P(Z=5)=P(X=1,Y=4)+P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=2)=\frac{3}{12}$$

$$P(Z=6)=P(X=2,Y=5)+P(X=3,Y=4)=\frac{2}{12}$$

$$P(Z=7)=P(X=3,Y=4)=\frac{1}{12}$$

ב.

$$V(Z)=V(X+Y)\overset{independent}{=}V(X)+V(Y)=\frac{(3-1+1)^2-1}{12}+\frac{(4-1+1)^2-1}{12}$$

$$V(2X+Y)=2^2V(X)+V(Y)=4\cdot\frac{(3-1+1)^2-1}{12}+\frac{(4-1+1)^2-1}{12}$$

ג.

$$P(X=1\,|\,Z=4)=\frac{P(X=1,Z=4)}{P(Z=4)}=\frac{P(X=1,Y=3)}{P(Z=4)}=\frac{1/12}{3/12}=\frac{1}{3}$$

שאלה 2

א. $\frac{4!\cdot 2!}{7!}$ (אפשר רק להחליף בין אותם מכתבים שמיועדים לאותה אחת).

או לפי גישה אחרת:

$\frac{\binom{1}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{1}\binom{6}{2}}$ (כאן מרחב המדגם מייצג את הבחירות של מכתבים לרונית ולנעה, כאשר במאורע הן חייבות לקבל את המכתבים שלהן).

ב. רוב המכתבים מיועדים לאילה. לכן, היא בודאי תקבל לפחות מכתב אחד שמיועד לה.
לכן צריך רק לדאוג שרונית תקבל את המכתב שמיועד לה, ושנעה תקבל את שני המכתבים שמיועדים לה, או מכתב אחד שמיועד לה ומכתב אחד שמיועד לאילה.
נעבוד עם מרחב מדגם של בחירת המכתבים לרונית ולנעה.
ההסתברות היא

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{2}{2}+\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}\binom{6}{2}}$$

ג. כל מכתב שמיועד לאילה, יגיע לאילה בסיכוי $\frac{4}{7}$.

כל מכתב שמיועד לנעה, יגיע לנעה בסיכוי $\frac{2}{7}$.

המכתב שמיועד לרונית, יגיע לרונית בסיכוי $\frac{1}{7}$.

מכיון שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות, אז תוחלת מספר המכתבים שיגיעו ליעדם היא $4\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{7}$.

שאלה 3

א. $P(X\geq 100)\overset{Markov}{\leq}\frac{E(X)}{100}=0.5$

למעשה $P(X\geq 100)=P(X=100)=0.5^{100}$.

ב. $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$.

לכן $E(X^2)=V(X)+E^2(X)=100\cdot 0.5\cdot 0.5+50^2$.

שאלה 4

א. הרצפים שמתחילים ומסתיימים במקומות 1 ו 10 הם הצלחה בסיכוי $\frac{1}{3}$.

הרצפים האחרים הם הצלחה בסיכוי $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

לכן תוחלת מספר הרצפים המוצלחים היא $2\cdot\frac{1}{3}+7\cdot\frac{1}{9}$.

ב. אם תוצאת ה"פלי" מופיעה במקום הראשון, אז נקבל רצף ראשון במקום 3.
אם תוצאת ה"פלי" מופיעה במקום השני, אז נקבל רצף ראשון במקום 4.
בכל המקרים האחרים, נקבל רצף ראשון כבר במקום 2.
לכן התוחלת היא $2\cdot\frac{1}{10}\cdot 3+\frac{1}{10}\cdot 4+\frac{8}{10}\cdot 2$.

ג. עד קבלת רצף של שתי תוצאות "עץ", אנו נמצאים בשני מצבים.
המצב הראשון הוא המתנה לתוצאת "עץ" שאחריה מייד יבוא "עץ" נוסף. אנו נמצאים במצב זה בהטלה הראשונה וגם כאשר ההטלה האחרונה עד כה היתה של "פלי".
המצב השני הוא המתנה לתוצאת "עץ" כאשר ההטלה האחרונה עד כה היתה של "עץ".
במצב הראשון, יש תמיד הסתברות של $\frac{1}{9}$ שנקבל הצלחה מיידית, וזאת באופן ב"ת

בעבר. לכן מספר הפעמים שנשהה במצב הראשון מתפלג $G\left(\frac{1}{9}\right)$.

במצב השני יש הסתברות של $\frac{1}{3}$ שנקבל הצלחה מיידית, וזאת באופן ב"ת בעבר.

לכן, מספר הפעמים שבו נשהה במצב השני מתפלג $G\left(\frac{1}{3}\right)$.

לכן, הזמן עד שנקבל רצף מתפלג כסכום של שני משתנים גיאומטריים בעלי התפלגויות $G\left(\frac{1}{9}\right)$ ו $G\left(\frac{1}{3}\right)$.

שלומי