פתרון תרגיל בית 12:

1. בכד כדורים אדומים שחורים ולבנים (4 מכל צבע). מוציאים מהכד 4 כדורים עם החזרה. יהיו X,Y,Z מספר הכדורים האדומים, השחורים והלבנים שהוצאו, בהתאמה.
   א. כיצד מ"מ אלו מתפלגים?
   ב. כיצד מתפלג $X+Y$? מהי שונותו?
   ג. מה מקדם המתאם בין X ל-Y?
   ד. מה מקדם המתאם בין $X+Y$ ל-Z?

פתרון:

א. $X,Y,Z\sim bin\left(4,\frac{4}{12}\right)$

ב. $X+Y\sim bin\left(4,\frac{8}{12}\right)$

ג. $V(X)=V(Y)=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

$$V(X+Y)=4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{2}[V(X+Y)-V(X)-V(Y)]=\frac{1}{2}\left[-\frac{8}{9}\right]=-\frac{4}{9}$$

$$\rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\cdot\sqrt{V(Y)}}=-\frac{1}{2}$$

ד. נשים לב כי $Z=10-(X+Y)$, כלומר יש קשר לינארי מלא בין Z ו-$X+Y$, וזהו קשר שלילי.
לכן $\rho_{X+Y,Z}=-1$

2. יהיו X,Y ניסויי ברנולי ב"ת עם סיכוי להצלחה 0.5 כ"א. נגדיר את המשתנים הבאים:
   i. $Z=X+Y$
   ii. $W=|X-Y|$
   א. האם Z,W בלתי מתואמים?
   ב. האם Z,W ב"ת?

פתרון:

א. ראשית:

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{4}$$

$$P(Z=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)=2P(X=0)P(Y=1)=\frac{1}{2}$$

$$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{4}$$

$$P(W=0)=P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{2}$$

$$P(W=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)=2P(X=0)P(Y=1)=\frac{1}{2}$$

$$E(Z)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1\ ;\quad E(W)=\frac{1}{2}$$

$$P(ZW=0)=P(Z=0)+P(W=0)-P(Z=0,W=0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-P(X=0,Y=0)$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$P(ZW=1)=P(Z=1,W=1)=2P(X=0,Y=1)=\frac{1}{2}$$
$$P(ZW=2)=P(Z=2,W=1)=0$$
$$E(ZW)=\frac{1}{2}$$

נבדוק את השונות המשותפת:

$$Cov(Z,W)=E(ZW)-E(Z)E(W)=\frac{1}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=0$$

לכן הם בלתי מתואמים!

ב. נשים לב כי : $P(Z=1,W=1)=\frac{1}{2}\ \neq\ P(Z=1)P(W=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

לכן הם לא בלתי תלויים!

3. מטילים קובייה 100 פעמים. X – מס' ההטלות שקיבלנו 2 או 3, Y – מס' ההטלות שקיבלנו 2 או 1. חשבו את $Cov(X,Y),\ \rho(X,Y)$

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי $Y\sim Bin\left(100,\frac{1}{3}\right)$, $X\sim Bin\left(100,\frac{1}{3}\right)$ לכן אפשר לכתוב:

$$X=\sum_{i=1}^{100}X_i\quad;\ X_i\sim Ber\left(\frac{1}{3}\right),\ \ Y=\sum_{i=1}^{100}Y_i\ \ ;Y_i\sim Ber\left(\frac{1}{3}\right)\ \ iid$$

לכן:

$$Cov(X,Y)=Cov\left(\sum_{i=1}^{100}X_i,\sum_{j=1}^{100}Y_j\right)=\ \sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100}Cov(X_i,Y_j)$$
$$X_i=\begin{cases}1 & 2\ or\ 3\ in\ ith\\ 0 & otherwise\end{cases},Y_i=\begin{cases}1 & 2\ or\ 1\ in\ ith\\ 0 & otherwise\end{cases},\qquad X_iY_i=\begin{cases}1 & 2\ \ in\ ith\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

נשים לב כי X_i,Y_j ב"ת עבור $i\neq j$ מכיוון שכ"א מתייחס להטלת קובייה אחרת וההטלות הן ב"ת.

לכן: $Cov(X_i,Y_j)=\ 0\ ;i\neq j$

עבור $i=j$:

$$Cov(X_i,Y_j)=E(X_iY_i)-E(X_i)E(Y_i)=P(X_iY_i=1)-P(X_i=1)P(Y_i=1)$$
$$=P(2)-P(2\ or\ 3)P(2\ or1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$$

ואז :

$$Cov(X,Y) = Cov\left(\sum_{i=1}^{100} X_i , \sum_{j=1}^{100} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100} Cov(X_i, Y_j) = \sum_{i=1}^{100} Cov(X_i, Y_i)$$
$$= 100Cov(X_1, Y_1) = \frac{100}{18}$$

$$Var(X) = 100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = Var(Y)$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{100}{18}}{100 \cdot \frac{2}{9}} = \frac{9}{36} = 0.25$$

4. (שאלה ממבחן) מושכים כדורים אחד אחרי השני וללא החזרה מכד בו מאה כדורים בארבעה צבעים:
25 כדורים אדומים, 25 כדורים כחולים, 25 כדורים לבנים, ו-25 כדורים צהובים.
א. מה הסיכוי שנוציא כדור אדום בטרם יהיו בחוץ שני כדורים כחולים?
ב. בהינתן שאחרי הוצאת ארבעה כדורים יש בידינו שניים אדומים ושניים כחולים, מה הסיכוי לכך שאחרי שני כדורים היו בידינו אדום וכחול?
ג. אחרי שמשכנו חמישים כדורים בזה אחר זה, מהי שונות מספר הרצפים של אדום ואח"כ כחול שקיבלנו?
ד. אם ידוע שבעשרה כדורים הראשונים יצאו שלושה כחולים, כיצד מתפלג מספר האדומים בעשרה כדורים הראשונים?

<u>פתרון:</u>

א. נצמצם את מרחב המדגם רק לכדורים האדומים והכחולים (הצהובים והירוקים לא משפיעים על מאורע זה). אז מוציאים ללא החזרה מכד בו 50 כדורים, חציים כחולים וחציים אדומים. נסמן את המאורע המבוקש ב-*A*

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - P(the\ first\ two\ balls\ are\ blue)$$
$$= 1 - P(first\ ball\ is\ blue)P(second\ ball\ is\ blue | first\ ball\ is\ blue)$$
$$= 1 - \frac{25}{50} \cdot \frac{24}{49} = \frac{1850}{2450} = 0.7551$$

ב. ידוע ש-4 ההוצאות הראשונות היו 2 כחולים ו-2 אדומים, השאלה שקולה לסידור 4 ארבעת הכדורים האלה בשורה. נסמן ב-*B* את המאורע המבוקש. יש $\binom{4}{2} = 6$ מקומות אפשריים לכדורים האדומים. כדי ש-*B* לא יתקיים צריך ששני הראשונים יהיו אדומים או שני הראשונים יהיו כחולים. כלומר 2 סידורים כאלה אפשריים קיימים.

$$P(B) = 1 - P(B^C) = \frac{2}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3}$$

ג. נסמן ב-*X* את מספרים הרצפים של אדום ואח"כ כחול שהתקבלו.
נפרק לאינדיקטורים. X_i- במקום ה-*i* יש אדום, ובמקום ה-*i+1* יש כחול,
עבור $1 \le i \le 49$.

$$P(X_i = 1) = \frac{25}{100} \cdot \frac{25}{99} = \frac{25}{396}$$

ועבור $j > 1$ מתקיים:

$$P\left(X_i=1,X_j=1\right)=\begin{cases}0 & j=i+1\\ \frac{25}{100}\cdot\frac{25}{99}\cdot\frac{24}{98}\cdot\frac{24}{97}=\frac{200}{52283} & else\end{cases}$$

לכן
$$Cov\left(X_i,X_j\right)=\begin{cases}0-\left(\frac{25}{396}\right)^2 & j=i+1\\ \frac{200}{52283}-\left(\frac{25}{396}\right)^2 & else\end{cases}$$

ישנם 48 זוגות מהסוג הראשון ו-$\binom{49}{2}-48$ זוגות מהסוג השני.

$$\mathrm{V}(X)=V\left(\sum_{i=1}^{49}X_i\right)=\sum_{i=1}^{49}V(X_i)+2\sum_{i<j}Cov\left(X_i,X_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{49}V(X_i)+2\sum_{i=1}^{48}Cov(X_i,X_{i+1})+2\sum_{i<j+1}Cov\left(X_i,X_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{49}\frac{25}{396}\left(1-\frac{25}{396}\right)+2\sum_{i=1}^{48}\left(0-\left(\frac{25}{396}\right)^2\right)$$

$$+2\sum_{i<j+1}\left(\frac{200}{52283}-\left(\frac{25}{396}\right)^2\right)=$$

$$49\cdot\frac{25}{396}\cdot\left(1-\frac{25}{396}\right)-2\cdot48\cdot\left(\frac{25}{396}\right)^2+2\cdot\left(\binom{49}{2}-48\right)\cdot\left(\frac{200}{52283}-\left(\frac{25}{396}\right)^2\right)=2.154$$

5. מבצעים סדרה של n הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן. יהי X- מספר ההצלחות. חשבו באמצעות שימוש באי-שיוויון צ'בישב ה-n המינימלי כך ש- $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}\right|\ge\frac{1}{10}\right)\le\frac{1}{16}$.

<u>פתרון:</u>

$$\mathrm{X}\sim bin\left(n,\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{E(X)}=\frac{\mathrm{n}}{2}\qquad V(X)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$$

לכן
$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{2}\qquad V\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{4n}$$

בשימוש בא"ש צ'בישב מתקיים:

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}\right|\ge\frac{1}{10}\right)\le\frac{V\left(\frac{X}{n}\right)}{0.1^2}=\frac{\frac{1}{4n}}{0.1^2}=\frac{25}{n}$$

לכן נרצה ש-$\frac{25}{n}\le\frac{1}{16}$ וזה מתקיים עבור n=400.

6. מבצעים סדרה אין סופית של הטלות מטבע. על צד אחד של המטבע מופיע 0 ועל הצד השני מופיע 1. בכל הטלה המטבע נופל על 0 בסיכוי $\frac{2}{3}$ ועל 1 בסיכוי $\frac{1}{3}$ באופן בלתי תלוי בהטלות האחרות.
עבור $1\le i<\infty$ יהי X_i- אינדיקטור לקבלת התוצאה 1 בהטלה ה-*i*.
עבור $1\le i<\infty$ יהי Z_i- אינדיקטור לקבלת תוצאות שונות בהטלות ה-*i* וה-*i+1*.

עבור $1 \le n < \infty$ יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

עבור $1 \le n < \infty$ יהי $T_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

א. מצאו חסם עליון באמצעות א"ש צ'בישב ל- $P(|S_{90} - 30| > 10)$

ב. מצאו חסם עליון באמצעות א"ש מרקוב ל- $P(T_{90} \ge 60)$

<u>פתרון:</u>

א.

$$E(S_{90}) = E\left(\sum_{i=1}^{90} X_i\right) = \sum_{i=1}^{90} E(X_i) = \sum_{i=1}^{90} \frac{1}{3} = 30$$

$$V(S_{90}) = V\left(\sum_{i=1}^{90} X_i\right) = \sum_{i=1}^{90} V(X_i) = \sum_{i=1}^{90} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 20$$

$$P(|S_{90} - 30| > 10) \le \frac{V(S_{90})}{10^2} = 0.2$$

ב.

$$E(Z_i) = P(Z_i = 1) = P(\{(0,1),(1,0)\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$$E(T_{90}) = E\left(\sum_{i=1}^{90} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{90} E(Z_i) = \sum_{i=1}^{90} \frac{4}{9} = 40$$

לכן $P(T_{90} \ge 60) \le \frac{E(T_{90})}{60} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

7. בכד יש 1000 כדורים, 500 לבנים ו-500 שחורים. מוציאים מהכד 100 כדורים ללא החזרה. מצאו בעזרת אי שיוויון מרקוב ואי שיוויון צ'בישב חסם עליון לסיכוי שיצאו יותר מ-70 כדורים לבנים (למצוא שני חסמים).

<u>פתרון:</u>

נסמן ב-X את מספר הכדורים הלבנים שיצאו.

$$X \sim HG(100,500,500)$$

מתקיים $E(X) = 100 \cdot \frac{500}{500+500} = 50$

וגם $V(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{99}{999}\right) = \frac{22500}{999}$

נבחין כי זו התפלגות סימטרית סביב 50.

כלומר לכל $0 \le k \le 49$ מתקיים $P(X = k) = P(X = 100 - k)$

לפי א"ש מרקוב:

$$P(X \ge 70) \le \frac{E(X)}{70} = \frac{50}{70} = \frac{5}{7} = 0.714$$

לפי א"ש צ'בישב

$$P(X \geq 70) = \frac{1}{2} \cdot P(|X-50| \geq 20) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{V(X)}{20^2} = \frac{\left(\frac{22500}{999}\right)}{800} = 0.028$$

כאשר השיוויון הראשון מתקיים בגלל הסימטריה.