

פתרון תרגיל בית 11:

1. בבריכת נוי יש 2 דגי זהב ו-3 דגים פשוטים. אתם מוציאים דג אחר דג באופן מקרי ומעבירים לאקווריום משלכם עד אשר יוצא לראשונה דג זהב. את כל הדגים שהוצאתם אתם מעבירים לאקווריום משלכם.
 א. רשמו את פונ' ההסתברות של X – מס' הדגים שהעברתם לאקווריום שלכם
 ב. חשבו תוחלת ושונות X ושל Y – מס' הדגים שנותרו בבריכת הנוי

פתרון:

א. התפלגות X :

$$P(X = 1) = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}, \quad P(X = 3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}$$

$$P(X = 4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10} = 1 - \frac{2+3+4}{10}$$

ב. תוחלת ושונות X :

$$E(X) = 1 * 0.4 + 2 * 0.3 + 3 * 0.2 + 4 * 0.1 = 2$$

בממוצע נוציא כ-3 דגים עד שייצא דג זהב.
 שונות:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = 1 * 0.4 + 4 * 0.3 + 9 * 0.2 + 16 * 0.1 = 5$$

$$Var(X) = 5 - 2^2 = 1$$

נגדיר Y – מס' הדגים שנשארו בבריכה, חשבו את $E(Y)$:

נשים לב שאפשר לבטא את Y כפונ' של X : $Y = 5 - X$

$$E(Y) = E(5 - X) = 5 - E(X) = 5 - 2 = 3$$

שונות Y :

$$Var(Y) = Var(5 - X) = (-1)^2 Var(X) = Var(X) = 1$$

2. במבחן 40 שאלות, מתוכן 30 קלות שכולם ידועים לפתור ו-10 שאלות קשות שאף אחד לא יודע לפתור. אופן הבחינה הוא כזה: תלמיד ניגש ושולף 5 שאלות באקראי. כדי לעבור את המבחן הוא צריך לענות לפחות על 4.
- א. מה הסיכוי שבין 8 תלמידים שנגשים לבחינה באופן ב"ת ייכשלו יותר מ-2?
- ב. מה תוחלת ושונות הציון של תלמיד שניגש לבחינה אם על תשובה נכונה מקבלים 20 נקודות ועל תשובה שגויה יורדות 15 נקודות?
- ג. מה תוחלת ושונות מספר התלמידים, מבין ה-8 שניגשו, שיעברו את הבחינה?

ד. מהי תוחלת ושונות מס' הנכשלים?

פתרון:

א. נסמן ב- X את מספר השאלות שתלמיד ענה נכון, $X \sim \text{HG}(n = 5, a = 30, b = 10)$ ולכן

$$P(\text{pass}) = P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{\binom{30}{4} \binom{10}{1}}{\binom{40}{5}} + \frac{\binom{30}{5}}{\binom{40}{5}} = 0.634$$

נסמן ב- Y את מספר הסטודנטים שנכשלו, $Y \sim \text{Bin}(8, 0.366)$ ונקבל ש:

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - \left(0.634^8 + \binom{8}{1} 0.366 * 0.634^7 + \binom{8}{2} 0.366^2 * 0.634^6 \right) = 0.609$$

ב. נסמן ב- Z את הציון שנקבל: $Z = 20X - 15(5 - X) = 35X - 75$

$$E(Z) = 35E(X) - 75 = 35 * 5 * \frac{30}{40} - 75 = 56.25$$

ג. נסמן ב- W את מספר הסטודנטים שעברו, $W \sim \text{Bin}(8, 0.634)$ ומכאן:

$$E(W) = 8 * 0.634 = 5.072, \quad \text{Var}(W) = 8 * 0.634 * 0.366 = 1.856$$

3. במשחק קלפים מקבל שחקן 3 קלפים. יהיו X – מספר הלבבות שקיבל, ו- Y מספר המעוינים שקיבל.

א. מצאו התפלגות משותפת של X ו- Y . האם הם ב"ת?

ב. מצאו התפלגות $Y+X$.

ג. חשבו $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, חשבו גם את $E(X*Y)$ (רמז: השתמשו בשונות הסכום ובסכום השוניות בשביל לחשב את COV , והשתמשו בהגדרת COV)

פתרון:

א. נזהה את התפלגויות X ו- Y : $X \sim \text{HG}(3, 13, 39)$, $Y \sim \text{HG}(3, 13, 39)$

$$P(X = k, Y = l) = \frac{\binom{13}{k} \binom{13}{l} \binom{26}{3-k-l}}{\binom{52}{3}} \quad 0 \leq k \leq 3, 0 \leq l \leq 3$$

וכמוכן ש- X ו- Y תלויים (אפשר להראות ש- $P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$)

ב. נשים לב כי: $X + Y \sim \text{HG}(3, 26, 26)$

ג. תוחלת ושונות:

$$E(X) = E(Y) = 3 \frac{13}{52} = 0.75 \quad E(X + Y) = 3 \frac{26}{52} = 1.5$$

$$V(X) = V(Y) = 3 \frac{13}{52} \left(1 - \frac{13}{52}\right) \frac{52-3}{52-1} = \frac{147}{272}$$

$$V(X + Y) = 3 \frac{26}{52} \left(1 - \frac{26}{52}\right) \frac{52-3}{52-1} = \frac{49}{68}$$

$$COV(X, Y) = 0.5(V(X + Y) - V(X) - V(Y)) = -\frac{49}{272}$$

$$E(X \cdot Y) = COV(X, Y) + E(X)E(Y) = \frac{13}{34}$$

4. מטילים קובייה אדומה וקובייה לבנה. שתי הקוביות הוגנות. יהי X תוצאת הקובייה האדומה ו- Y תוצאת הקובייה הלבנה. יהיו $Z = X + X = 2X$ ו- $W = X + Y$.
- א. חשבו את התוחלת והשונות של X .
- ב. חשבו את $E(Z)$, $E(W)$, $V(Z)$, $V(W)$.
- ג. הסבירו מדוע קיים השוויון $E(W) = E(Z)$ ולעומת זאת לא קיים שוויון בין $V(W)$ ל- $V(Z)$?

פתרון:

א. תוחלת ושונות X :

$$X \sim U[1,6], \quad P(X = k) = \frac{1}{6} \quad k = 1, \dots, 6$$

$$E(X) = \frac{7}{2} = 3.5, \quad \text{Var}(X) = \frac{6^2 - 1}{12} = 15 \frac{1}{6}$$

ב. תוחלות ושונויות Z, W :

$$E(Z) = E(2X) = 2E(X) = 2 * 3.5 = 7.5$$

$$E(W) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 3.5 + 3.5 = 7$$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(2X) = 2^2 \text{Var}(X) = 4 * 2.912$$

$$\text{Var}(W) = \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2 * 2.912$$

- ג. הפיזור של Z יותר גדום כיוון שיש בו פחות מידע לגבי 2 ההטלות מאשר תוצאות שתי ההטלות ב- W .

5. לקבוצת כדוריד מתוכננים שני משחקים. יש לה סיכוי 0.4 לא להפסיד את המשחק הראשון, ו-0.7 לא להפסיד את השני, באופן בלתי תלוי בראשון. עבור כל משחק, אם איננה מפסידה, יש לה סיכוי זהה לתיקו ולניצחון (באופן בלתי תלוי במשחק השני). הקבוצה מקבלת 2 נקודות לניצחון, נקודה לתיקו ואפס להפסד. מצאו את התפלגות, תוחלת ושונות מספר הנקודות של הקבוצה.

פתרון:

נסמן את מספר הנקודות בו זוכה הקבוצה לאחר שני המשחקים ב- X ונחשב

$$P(X = 0) = P(\{(הפסד, הפסד)\}) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$$

$$P(X = 1) = P(\{(תיקו, הפסד), (תיקו, הפסד)\}) = 0.6 \cdot 0.35 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.27$$

$$P(X = 2) = P(\{(ניצחון, הפסד), (תיקו, תיקו), (הפסד, ניצחון)\}) \\ = 0.6 \cdot 0.35 + 0.2 \cdot 0.35 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.34$$

$$P(X = 3) = P(\{(ניצחון, תיקו), (ניצחון, ניצחון)\}) = 0.2 \cdot 0.35 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.14$$

$$P(X = 4) = P(\{(ניצחון, ניצחון)\}) = 0.2 \cdot 0.35 = 0.07$$

נחשב

$$E(X) = 0 \cdot 0.18 + 1 \cdot 0.27 + 2 \cdot 0.34 + 3 \cdot 0.14 + 4 \cdot 0.07 = 1.65$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot 0.18 + 1^2 \cdot 0.27 + 2^2 \cdot 0.34 + 3^2 \cdot 0.14 + 4^2 \cdot 0.07 = 4.01$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4.01 - (1.65)^2 = 1.2875$$

6. מטילים קוביה הוגנת n פעמים. נסמן ב- X את מספר הפעמים שהתקבלה

התוצאה 1, וב- Y את מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6.

א. כיצד מתפלגים X ו- Y ? מהן שונותיהם?

ב. חשבו את $Cov(X, Y)$

פתרון:

$$V(X) = V(Y) = \frac{5n}{36} \quad \text{לכן} \quad X, Y \sim Bin\left(n, \frac{1}{6}\right) \quad \text{א.}$$

$$V(X + Y) = \frac{2n}{9} \quad \text{לכן} \quad X + Y \sim Bin\left(n, \frac{1}{3}\right) \quad \text{ב.}$$

ומכאן על ידי שימוש בנוסחה $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$, נקבל

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2}[V(X + Y) - V(X) - V(Y)] = -\frac{n}{36}$$