תרגיל בית 10:

1. משטרת התנועה מציבה K מכמונות מהירות על כביש כאשר $K\sim U[1,3]$. נהג החליט לנסוע על כביש 6 ולא שם לב שחרג מהמהירות המותרת לאורך כל הנסיעה. ישנה הסתברות של $\frac{1}{3}$ שהנהג יצולם ע"י כל מצלמה. יהי N – מס' הדוחות שקבל הנהג.
   א. כיצד מתפלג $N|K=k$?
   ב. מצאו את ההתפלגות המשותפת של N,K
   ג. אם קנס על מהירות הוא 270 ₪ כמה צפוי הנהג לשלם בתום הנסיעה?

פתרון:

א. נשים לב שאם ידוע מס' המכמונות $K=k$ אז כל אחת כזו הוא ניסיון עם הצלחה (דוח) בסיכוי $\frac{1}{3}$ לכן $N|K=k\sim Bin\left(k,\frac{1}{3}\right)$

ב. במקרה זה יש קשר הדוק של סיבה ותוצאה בין מס' המצלמות לבין כמות הדוחות לכן נתנה על כמות המצלמות:

$$P(N=n,K=k)=P(N=n\ |K=k)P(K=k)=P(N=n|K=k)\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\binom{k}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-n}\cdot\frac{1}{3}=\binom{k}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-n};\ \ k=0,1,2,3$$

בטבלה :

N \ K	1	2	3	$P(N=n)$
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{38}{81}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{11}{27}$
2	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$
$P(K=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

ג. כל קנס הוא 270 ₪ לכן תוחלת הקנס היא:

$$E(270N)=270E(N)=270\left(\frac{11}{27}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{81}\right)=180$$

2. האסיר אנדי מגלה 3 מחילות נסתרות היוצאות מרצפת תאו.
   - אם יבחר בראשונה – ימצא את עצמו בתום 2 ימי זחילה בחזרה בתא ממנו יצא.
   - אם יבחר בשניה – יחזור לתא לאחר 4 ימים.
   - אם יבחר בשלישית – יצא לחופשי בתום מסע בן יום.

בתום כל סיבוב הוא אינו זוכר אילו מחילות ניסה כבר, ובוחר בראשונה בהסתברות 0.5, בשניה בהסתברות 0.3 ובשלישית בהסתברות 0.2. מהי תוחלת מספר הימים עד שיצא אנדי לחופשי?

פתרון:

נסמן ב-X את מספר הימים המבוקש וב-Y את מספר המחילה בה יבחר אנדי בניסיונו הראשון. נשים לב כי $X|\{Y=1\}=Z+2$, כאשר Z הוא מ"מ בעל אותה ההתפלגות כמו של X, זאת מפני שלאחר שחזר אנדי לתאו חזרנו למעשה לנקודת ההתחלה, פרט לכך ש"שרפנו" כבר יומיים על המחילה הראשונה. באופן דומה $X|\{Y=2\}=Z+4$, ואילו $X|\{Y=3\}=1$. תוחלת על כל אחד מהשוויונות תניב:

$$\begin{cases} E[X|Y=1]=E[X]+2 \\ E[X|Y=2]=E[X]+4 \\ E[X|Y=3]=1 \end{cases}$$

(זאת מפני ש-X ו-Z שווי התפלגות, ולכן $E(X)=E(Z)$), ובאמצעות שימוש במשפט התוחלת השלמה נקבל

$$\mathrm{E}(X)=E[E(X|Y)]=\sum_{y=1}^{3}E[X|Y=y]P(Y=y)=0.5\cdot(E[X]+2)+0.3\cdot(E[X]+4)+0.2\cdot 1$$
$$=0.8\cdot E(X)+2.4 \implies E[X]=12$$

3. לדוד שני ילדים: עמי ונועה, ומכונית פורד קורטינה מודל 82 שידעה ימים יפים יותר. 60% מהזמן נמצא הרכב אצל נועה, וב-10 מהמקרים האלה חוזר הרכב עם דפיקה. ביתר הזמן נמצא הרכב אצל עמי, שדופק את הרכב ב-20% מהמקרים.

   א. דוד קם בבוקר וגילה שתא המטען של הקורטינה התאחד עם המושב האחורי. מה ההסתברות שעמי הוא זה שאחראי לכך?

   ב. דוד מחליט על אסטרטגיה חדשה: בתחילת כל חודש הוא מגריל מספר N המתפלג $bin\left(30,\frac{1}{3}\right)$. זהו מספר הימים בחודש הקרוב בהם דוד מוכן לתת לילדים את הרכב. מהי תוחלת מספר הדפיקות אותן יספוג הרכב בחודש זה (בהנחה שרק אחד מהילדים לוקח את הרכב ביום נתון, וב60% מהימים שילד לוקח את הרכב נועה היא שלוקחת את הרכב)?

<u>פתרון:</u>

א. ראשית

$$\mathrm{P}(\text{מכה})=\mathrm{P}(\text{מכה}|\text{נועה})\mathrm{P}(\text{נועה})+\mathrm{P}(\text{מכה}|\text{עמי})\mathrm{P}(\text{עמי})=0.1\cdot 0.6+0.2\cdot 0.4=0.14$$

כעת תוך שימוש בנוסחת בייס:

$$\mathrm{P}(\text{עמי}|\text{מכה})=\frac{\mathrm{P}(\text{מכה}|\text{עמי})\mathrm{P}(\text{עמי})}{P(\text{מכה})}=\frac{0.2\cdot 0.4}{0.14}=\frac{4}{7}$$

ב. אם X הוא מספר המכות שסופג הרכב בחודש, קל להיווכח (בהתאם לסעיף הקודם) ש-$X|N\sim bin(N,0.14)$, ולפי כך ממשפט התוחלת השלמה

$$\mathrm{E}[X]=E\big[E[X|N]\big]=E[0.14N]=0.14E[N]=0.14\cdot\left(30\cdot\frac{1}{3}\right)=1.4$$

4. מטילים מטבע הוגן שוב ושוב עד הפעם הראשונה שבה מתקבלים שני "עץ" או שני "פלי" ברצף. נסמן ב- X – את מספר הטלות המטבע.
   א. מצאו את התפלגות X, והסיקו מכך את תוחלת X.
   ב. נגדיר את Y - מס' ההטלות <u>לאחר</u> ההטלה הראשונה, זהו את התפלגות Y. הסיקו מכך את תוחלת X.

<u>פתרון:</u>

א. ישנם 2^k רצפים אפשריים של עץ ו-פלי באורך k, מתוכם רק 2 מסתיימים בפעם הראשונה ב-(עץ,עץ) או (פלי,פלי) (עץ ופלי לסירוגין עד שבסוף יש פעמיים עץ או פעמיים פלי) לכן את נסמן את מס' ההטלות עד לקבלת (עץ,עץ) או (פלי,פלי) בפעם הראשונה ב- X נקבל:

$$P(X=k)=\frac{2}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}\ ;\ \ k=2,3,....$$

ואז:

$$E(X)=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot\frac{1}{2^{k-1}}=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}+1=3$$

ב. נגדיר את Y - מס' ההטלות <u>לאחר</u> ההטלה הראשונה, ולשים לב שמתקיים

Y מתפלג גיאומטרית עם פרמטר $p=\frac{1}{2}$ (בכל הטלה משלים לרצף את ההטלה הקודמת בהסתברות 0.5)

$X=1+Y$, ולכן $\mathrm{E}(X)=1+E(Y)=3$.

5. לקידום מכירות של דגנים לארוחות בוקר מכריז היצרן על פרס לכל מי שיצבור אוסף מלא של n בולים שונים. n הבולים מפוזרים באופן אחיד, כך שבכל קניה של אריזה אחת הסיכוי לקבל בול מסוג מסוים הוא $\frac{1}{n}$ באופן ב"ת באריזות האחרות.
אדם קנה k אריזות. חשב את תוחלת מספר הבולים השונים שצבר.

<u>פתרון:</u>
נגדיר את X להיות מספר הבולים השונים שצבר מ-k האריזות.
ולכל $1\le i\le n$ נגדיר את X_i- אינדיקטור המייצג האם הבול ה-i התקבל באחת מ-k האריזות.
מתקיים: $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$
נחשב את התוחלת של כל אינדיקטור:

$$\mathrm{E}[X_i]=P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

לכן:

$$\mathrm{E}[X]=E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)=n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$$

6. מבצעים סדרה של n הטלות מטבע שהסתברותו ליפול על 'עץ' הינה p ($0 \le p \le 1$), בכל הטלה אם מתקבל 'עץ' זוכים בשקל אחד ואם מתקבל 'פלי' מפסידים 5 שקלים. יהי R הרווח בסדרה. חשבו את תוחלת R.

<u>פתרון:</u>

נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהתקבל 'עץ' בסדרת ההטלות. אזי $\mathrm{X} \sim bin(n,p)$, ונבחין כי מספר הפעמים שהתקבל 'פלי' בסדרת ההטלות הוא $n - X$.

לכן $\mathrm{R} = 1 \cdot X + (-5) \cdot (n - X) = 6X - 5n$

מכאן $\mathrm{E}(R) = E(6X - 5n) = 6E(X) - 5n = 6 \cdot p - 5n$