

פתרון תרגיל בית 9:

1. בבחינה אמריקאית n שאלות בנות 4 תשובות. סטודנט יודע את התשובה לכל אחת מן השאלות בהסתברות p , אחרת הוא מנחש. על תשובה נכונה מקבל $\frac{100}{n}$ נקודות ועל תשובה שגויה הוא נקנס ב- $\frac{40}{n}$ נקודות. חשבו את תוחלת ציון הבחינה של הסטודנט.

פתרון:

נסמן ב- X את ציון הבחינה וב- X_i את הניקוד על השאלה ה- i , כאשר ברור ש- $X = \sum_{i=1}^n X_i$. כעת,

$$P(\text{correct answer}) = P(\text{correct answer} | \text{knows})P(\text{knows}) + P(\text{correct answer} | \text{guesses})P(\text{guesses})$$

$$= 1 \cdot p + \frac{1}{4}(1 - p) = \frac{1 + 3p}{4}$$

$$P(\text{wrong answer}) = 1 - P(\text{correct answer}) = \frac{3(1 - p)}{4}$$

ונקבל

$$E(X_i) = \frac{100}{n} \cdot P(\text{correct answer}) - \frac{40}{n} \cdot P(\text{wrong answer}) = \frac{100}{n} \cdot \frac{1 + 3p}{4} - \frac{40}{n} \cdot \frac{3(1 - p)}{4} = \frac{5}{n}(21p - 1)$$

$$E(X) = nE(X_i) = 5(21p - 1)$$

2. זמן התיקון של מכשיר חשמלי מקבל ערכים 7, ..., 11, בסיכוי שווה. מסרתם לתיקון 3 מכשירים.
- א. מהי תוחלת זמן התיקון של מכשיר בודד?
 - ב. מחיר שעת עבודה הוא 70 ₪. וכן יש תוספת קבועה של 100 ₪ לכל תיקון. חשבו את תוחלת עלות כל תיקון
 - ג. חשבו תוחלת עבור עלות התיקון הכוללת.

פתרון:

- א. נתון כי זמן התיקון X הנו $X \sim U[7, 11]$. לכן אפשר להציגו כ- $X = Y + 6; Y \sim U[1, 5]$
- $$E(X) = E(Y) + 6 = \frac{5+1}{2} + 6 = 9$$
- ב. נסמן Z_i - עלות תיקון מכשיר i . אז מתקיים: $Z_i = 100 + 70X_i$ כאשר X_i זמן תיקון מכשיר i . מסעיף א' נקבל: $E(Z_i) = 100 + 70E(X_i) = 730$
- ג. נסמן $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$ עלות תיקון כוללת אז:
- $$E(Z) = 3 * 730 = 2190$$

3. 6 אנשים, ביניהם דלית ואייל נעמדים בשורה באופן אקראי. מהי תוחלת מס' האנשים בין דלית לאייל?

פתרון:

- נגדיר: $X_i = 1$ אם האדם ה- i עומד ביניהם. ונשים לב שאם נסמן את מס' האנשים בין דלית לאייל ב- X אזי: $X = X_1 + \dots + X_4$. נחשב את $P(X_i = 1)$:
- נתמקד רק באדם ה- i , בדלית ובאייל. יש 3 אפשרויות שוות סיכוי: או שאייל באמצע, או שדלית באמצע או שאדם i באמצע. לכן $P(X_i = 1) = \frac{1}{3}$. (סידור שאר האנשים לא חשוב)

$$E(X) = 4E(X_i) = \frac{4}{3}$$

4. לפניכם המשחק הבא: מוציאים באופן מקרי קלף מתוך חפיסת קלפים. אם יצאה תמונה מקבלים 10 מטבעות, אם יצא מספר, משלמים 2 מטבעות. האם כדאי להשתתף במשחק?

פתרון:

נסמן: X – הרווח מן המשחק. X מקבל 2 ערכים: 10 או -2.

נחשב את ההסתברויות לכל מאורע (ניצחון או הפסד)

$$P(X = 10) = P(\text{תמונה}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}; \quad P(X = -2) = P(\text{מספר}) = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$$

ז"א שבסיכוי $\frac{10}{13}$ מפסידים כסף במשחק בודד לכן לא ברור אם אכן כדאי, נתבונן מה יקרה בסדרת משחקים ארוכה:

$$E(X) = 10P(X = 10) - 2P(X = -2) = 10 * \frac{12}{52} - 2 * \frac{40}{52} = \frac{10}{13} > 0$$

תוחלת הרווח חיובית לכן לטווח הארוך המשחק כדאי.

5. כאשר משדרים ביטים בקו תקשורתי יש סיכוי של 0.01 שהביט נקלט באופן שגוי (0 במקום 1 או להיפך). כדי לצמצם טעויות משודר של ביט 3 פעמים ומפוענח בצד השני ע"פ מה שנקלט רוב הפעמים מתוך ה-3.
 א. מנסים להעביר הודעה באורך 1000 ביטים. מה הסיכוי שתפוענח נכון?
 ב. מנסים להעביר 20 הודעות באורך 1000 ביטים (כל אחת). מהי תוחלת מס' ההודעות שיפוענחו נכון?

פתרון:

א. תחילה נחשב את הסיכוי שביט בודד שמשודר 3 פעמים יפוענח נכון: יהי X מס' הביטים מבין ה-3 שפוענחו נכון, אז $X \sim Bin(3, 0.99)$ לכן:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3 \cdot 0.99^2 \cdot 0.01 + 0.99^3 = 0.9997$$

ביטים כנ"ל, נסמן ב- Z את מס' הביטים שפוענחו נכון אז $Y \sim Bin(1000, 0.9997)$ לכן $P(Y = 1000) = 0.9997^{1000} = 0.74$

ב. כעת שולחים 20 הודעות כנ"ל, כ"א מפוענחת נכון בסיכוי 0.74 לכן Z – מס' ההודעות שמפוענחות נכון מקיים: $Z \sim Bin(20, 0.74)$ ותוחלתו היא: $E(Z) = 20 * 0.74 = 14.8$

6. מפעל מרוויח בשנה X במיליוני שקלים. נתון: עבור $x = 0, \dots, 4$; תחת ההתפלגות

$$P(X = x) = c(5 - x)$$

א. מצאו את c :

נמצא את C ע"י השוואת סכום ההסתברויות ל-1:

$$1 = c \sum_{i=0}^4 (5 - i) = 5c * 5 - c \sum_{i=0}^4 i = 25c - 10c = 15c \Leftrightarrow c = \frac{1}{15}$$

ב. חשבו את תוחלת X :

$$E(X) = \frac{11}{5} \sum_{i=0}^4 i(5 - i) = \frac{11}{5} \sum_{i=1}^4 5i - \frac{11}{5} \sum_{i=1}^4 i^2 = 1.33$$

ג. המנכ"ל מקבל בונוס שנתי לפי הנוסחה: $Y = 10^4(X + 1)$. חשבו את תוחלת הבונוס השנתי של המנכ"ל.

$$E(Y) = E(10^4 X + 10^4) = 44,000 + 10,000 = 54,000$$

ד. מהו הסיכוי שהמנכ"ל יקבל בונוס גדול מהתוחלת של Y ?

גדול מהתוחלת אם $X = 2, 3, 4$ אז:

$$P(Y > E(Y)) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{15}(3 + 5 + 2 + 3 + 4) = \frac{6}{15} = 0.4$$