פתרון תרגיל בית 8:

1. בחברת המספקת שירותי תיקון וגרירה למכוניות, מתקבלות בקשות לשירות בקצב פואסוני של 5.2 קריאות לשעה בממוצע.
   א. מה ההסתברות שבשעה אחת יתקבלו בדיוק 5 קריאות?
   ב. מה ההסתברות שבמשמרת של 4 שעות יתקבלו 20 קריאות?
   ג. במשמרת הבוקר (4 שעות) התקבלו בדיוק 22 בקשות לשירות. מהי ההסתברות ש-7 מהן התקבלו במשך השעה הראשונה? (רמז: חישבו כיצד מתפלג מס' הקריאות המגיעות בשעה הראשונה)
   ד. אם בין 8:00 ל- 8:30 בבוקר מתקבלות יותר מ-4 קריאות, מוזעק למוקד טכנאי תורן. מה הסיכוי שבמשך חודש (30 ימים) יוזעק הטכנאי יותר מ-3 פעמים?

פתרון:

X – מס' הבקשות לשירות בשעה, $X_1 \sim Pois(5.2)$.

א. בשעה אחת 5 קריאות:

$$P(X_1 = 5) = \frac{e^{-5.2}(5.2)^5}{5!} = 0.175$$

ב. מס' הבקשות ב-4 שעות מתפלג לפי : $X_4 \sim pois(5.2 * 4) = pois(20.8)$

$$P(X_4 = 20) = \frac{e^{-20.8}20.8^{20}}{20!} = 0.087$$

ג. ידוע שבמהלך 4 שעות התקבלו 22 בקשות. מחשב את התפלגות מס' הבקשות בשעה הראשונה:

$$P(X_1 = k | X_4 = 22) = \frac{P(X_1 = k, X_4 = 22)}{P(X_4 = 22)} = \frac{P(X_1 = k, X_{2-4} = 22 - k)}{P(X_4 = 22)} =$$

X_1, X_{2-4} הם ב"ת כי מתייחסים לפרקי זמן זרים, ובנוסף: $X_1 \sim pois(5.2), X_{2-4} \sim pois(15.6)$

$$= \frac{\frac{e^{-5.2}(5.2)^k}{k!} \cdot \frac{e^{-15.6}(15.6)^{22-k}}{(22-k)!}}{\frac{e^{-20.8}20.8^{22}}{22!}} = \frac{22!}{k!\,(22-k)!} \frac{(5.2)^k (15.6)^{22-k}}{(20.8)^{22}}$$

$$= \binom{22}{k} \left(\frac{5.2}{20.8}\right)^k \left(\frac{15.6}{20.8}\right)^{22-k} \quad ; \quad k = 0, \dots 22$$

לכן זו התפלגות $Bin\left(22, \frac{1}{4}\right)$:

$$P(X_1 = 7 | X_4 = 22) = \binom{22}{7} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^{15} = 0.14$$

ד. נסמן ב- Y את מס' הימים מתוך החודש בהם הוזעק טכנאי כלומר מס' הימים בהם התקבלו יותר מ-4 קריאות. $Y \sim Bin\big(30, P(X_{0.5} > 4)\big)$ נשים לב כי $X_{0.5} \sim pois(2.6)$

$$P(X_{0.5} > 4) = 1 - P(X_{0.5} = 4) - P(X_{0.5} = 3) - P(X_{0.5} = 2) - P(X_{0.5} = 1) - P(X_{0.5} = 0) =$$
$$1 - e^{-2.6}\left(1 + 2.6 + \frac{2.6^2}{2!} + \frac{2.6^3}{3!} + \frac{2.6^4}{4!}\right) = 0.122$$
$$P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = 0.51$$

2. בספרייה 2 מכונות צילום שפועלות 5 ימים בשבוע. זרם הופעות הקלקולים הוא פואסוני כך שלמכונה א' יש 5 קלקולים בממוצע בשבוע ולמכונה ב' יש בממוצע 10 קלקולים בשבוע. מניחים שמתקנים מכונה מיד כשמתקלקלת.
פתרון:

א. מה הסיכוי שביום שלישי תתקלקל מכונה א' לפחות פעמיים?
ביום כלשהו קצב הקלקולים של מכונה א' הוא $1 = \frac{5}{5}$ לכן:
$$P(X_1 \geq 2) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 1) = 1 - e^{-1}(1+1) = 0.264$$
ב. מה הסיכוי שביום ראשון ושני יחד יהיו בסך הכל בדיוק 3 קלקולים בשתי המכונות יחד?
שתי המכונות מתקלקלות בקצב $5 + 10 = 15$ קלקולים לשבוע לכן שתי המכונות ביומיים המתקלקלות בקצב של 6 קלקולים בשבוע לכן:
$$P(X_2 = 3) = \frac{e^{-6}6^3}{3!} = 0.089$$

3. מטילים מטבע הוגן שעל שני צדדיו רשומים המספרים 0 ו-1. אם התקבל 0 מטילים קוביה הוגנת ואילו אם התקבל 1 מטילים שוב את אותו המטבע. יהי X תוצאת ההטלה הראשונה ויהי Y תוצאת ההטלה השניה (בקוביה או במטבע).
בנה את טבלת ההתפלגות המשותפת של X ושל Y.
מצא את ההתפלגויות השוליות של X ושל Y.
האם X, Y הם מ"מ ב"ת?

<u>פתרון:</u>

ההתפלגות המשותפת של X,Y :
$$\mathrm{P}(X=1, Y=0) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{4}$$
$$P(X=1, Y=k) = \frac{1}{12} \;\; ; \;\; k = 1, \ldots, 6$$
ההתפלגות השולית של X היא ברנולי: $X \sim Bin(1, 0.5)$. התפלגות Y
$$P(Y=0) = \frac{1}{4}, P(Y=1) = \frac{1}{3}, P(Y=k) = \frac{1}{12} \; ; k = 2, \ldots, 6$$
X,Y תלויים, למשל:
$$P(X=1, Y=0) = \frac{1}{4} > P(X=1)P(Y=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

4. בעיירה נחמדה יש רופא ורופאה, כבאי וכבאית, שוטר ושוטרת. מרכז החירום של עיירה מאויש בכל יום על ידי שניים מתוך 6 בעלי התפקידים לעיל. נסמן ב-X את מספר הרופאים בערב מסוים במוקד החירום, וב-Y את מספר הנשים באותו ערב במוקד.
א. מצאו את ההתפלגות המשותפת (X,Y).
ב. חשבו וזהו את ההתפלגויות השוליות של X ושל Y .
ג. מצאו את ההתפלגות של $X+Y$.

<u>פתרון:</u>

ראשית נשים לב שבמרחב המדגם יש $\binom{6}{2} = 15$ אברים (בחירת 2 אנשים מתוך ה-6). לכן נספור בכל תא בטבלה כמה אברים ממרחב המדגם וכך נקבל את ההסתברות.

א. טבלת ההתפלגות המשותפת:

			X		
		0	1	2	PY
Y	0	1/15	2/15	0	3/15
	1	4/15	4/15	1/15	9/15
	2	1/15	2/15	0	3/15
	PX	6/15	8/15	1/15	

ב. חישוב השוליות נעשה בטבלה, כמו כן: $X\sim HG(2,2,4),\ Y\sim HG(2,2,3)$.

ג. אפשר לראות לפי הטבלה ש:

X+Y=k	0	1	2	3
P(X+Y=k)	1/15	6/15	5/15	3/15

5. בכד 10 כדורים לבנים, 5 שחורים ו-3 אדומים. משה ניגש לכד ומוציא מהכד 3 כדורים ללא החזרה. יהי X משתנה מקרי המתאר את מספר הכדורים הלבנים שהוציא משה, יהי Y משתנה מקרי המתאר את מספר הכדורים השחורים שמוציא משה.

א. רשמו את פונקצית ההתפלגות המשותפת של X ו-Y. בנוסף זהו את ההתפלגויות השוליות.

ב. חשבו את $P(X > 1|Y < 2)$.

ג. זהו את ההתפלגות $X+Y$.

<u>פתרון:</u>

			X			
		0	1	2	3	
	0	$\frac{\binom{10}{0}\binom{5}{0}\binom{3}{3}}{\binom{18}{3}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{5}{0}\binom{3}{2}}{\binom{18}{3}}$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{5}{0}\binom{3}{1}}{\binom{18}{3}}$	$\frac{\binom{10}{3}\binom{5}{0}\binom{3}{0}}{\binom{18}{3}}$	
	1	$\frac{\binom{10}{0}\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{18}{3}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{18}{3}}$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{5}{1}\binom{3}{0}}{\binom{18}{3}}$	0	
Y	2	$\frac{\binom{10}{0}\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{18}{3}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{0}}{\binom{18}{3}}$	0	0	
	3	$\frac{\binom{10}{0}\binom{5}{3}\binom{3}{0}}{\binom{18}{3}}$	0	0	0	

$X \sim HG(n=3, Special=10, Non-Special=8)$
$Y \sim HG(n=3, Special=5, Non-Special=13)$

$$P(X>1 \mid Y<2) = \frac{P(X>1, Y<2)}{P(Y<2)} = \frac{\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{5}{0}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{18}{3}} + \frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{5}{0}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{18}{3}} + \frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{18}{3}}}{P(Y=0)+P(Y=1)} = 0.71$$

את התפלגות הסכום ניתן למצוא באמצעות חישוב: $P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=k-i, Y=i)$

אך באופן אינטואיטיבי $X+Y$ זהו מספר הכדורים הלבנים והשחורים שהוצאו. נוכל להגדיר פריט "מיוחד" בתור הוצאת כדור לבן או שחור. בסך הכל יש $10+5=15$ פריטים מיוחדים (כדורים לבנים או שחורים) במדגם, גודל המדגם הוא 18, מספר ההוצאות הוא 3 , ולכן:
$X+Y \sim HG(n=3, Special=15, non-special=3)$