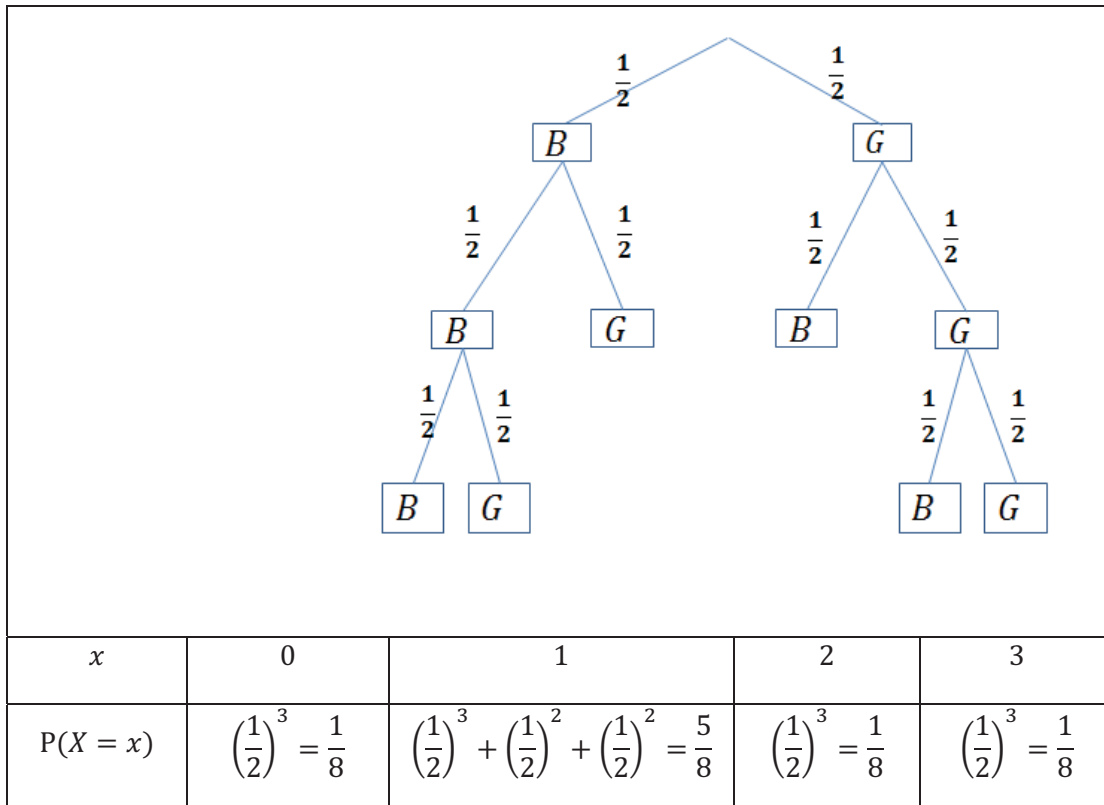


פתרון תרגיל בית 7:

1. זוג מוליד ילדים עד אשר יש להם ילד אחד (לפחות) מכל מין או עד שיש להם 3 ילדים (מה שקורה קודם). יהי X מספר הבנות שנולדו לזוג. רשמו את פונקציית ההסתברות של X (הניחו כי הסיכוי להולדת בן שווה לסיכוי להולדת בת)

פתרון:

נסמן G לבת ו- B לבן ונכתוב את כל האפשרויות:



2. עוד שאלה על משפחות ... :

- א. מה ההסתברות שבמשפחה עם 4 ילדים יהיה מס' שווה של בנים ובנות? מה ההסתברות שיהיו יותר בנים מבנות? (הניחו כי הסיכוי להולדת בן שווה לסיכוי להולדת בת)
- ב. ראינו 100 משפחות שלהן 4 ילדים. זהו את ההתפלגויות ומצאו את פונקציית ההסתברות של המ"מ הבאים:
 X - מס' המשפחות שלהן מספר שווה של בנים ובנות
 Y - מס' המשפחות שלהן יותר בנות מבנים
- ג. רשמו במפורש את $P(X = 30), P(Y \leq 95)$ (מבלי לחשב את הערכים)

פתרון:

- א. נסתכל על כל ילד במשפחה כאל ניסוי, כאשר "בת" זו הצלחה בסיכוי $\frac{1}{2}$. אז מס' הבנות במשפחה הוא בינומי: $Bin(4, \frac{1}{2})$ ולכן ההסתברות המבוקשת היא זו של 2 הצלחות:

$$P(2 \text{ girls \& } 2 \text{ boys}) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

הסיכוי שיהיו יותר בנים מבנות הוא סיכוי שתהיה בת אחת או 0 בנות (כלומר הצלחה אחת או 0 הצלחות)

$$P(\text{boys} > \text{girls}) = P(0 \text{ girls}) + P(1 \text{ girl}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

ב. התפלגות X:

$$P(2 \text{ girls \& } 2 \text{ boys}) = \frac{3}{8}$$

כעת יש 100 משפחות, כל אחת היא ניסוי עם סיכוי הצלחה $\frac{3}{8}$ ולכן: $X \sim \text{Bin}\left(100, \frac{3}{8}\right)$ פונקציית ההסתברות:

$$P(X = k) = \binom{100}{k} \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{100-k}; k = 0, \dots, 100$$

התפלגות Y:

באותו אופן, כעת הסיכוי להצלחה הוא $\frac{5}{16}$ ולכן $Y \sim \text{Bin}\left(100, \frac{5}{16}\right)$

$$P(Y = k) = \binom{100}{k} \left(\frac{5}{16}\right)^k \left(\frac{11}{16}\right)^{100-k}; k = 0, \dots, 100$$

$$P(X = 30) = \binom{100}{30} \left(\frac{3}{8}\right)^{30} \left(\frac{5}{8}\right)^{70} \quad \text{ג.}$$

$$P(Y \leq 95) = 1 - P(Y \geq 96) = 1 - [P(Y = 96) + \dots + P(Y = 100)] = 1 - \left[\binom{100}{96} \left(\frac{5}{16}\right)^{96} \left(\frac{11}{16}\right)^4 + \dots + \left(\frac{5}{16}\right)^{100} \right]$$

3. בכד יש 4 כדורים ירוקים, 3 כדורים ורודים ו-2 כדורים סגולים. מוציאים 4 ללא החזרה.

א. נסמן ב-X את מס' הצבעים השונים במדגם. מהי התפלגות X?

ב. נסמן ב-Y את מס' הירוקים במדגם. מהי התפלגות Y?

פתרון:

א. נמצא את ההתפלגות ישירות: מרחב המדגם: $\binom{9}{4}$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{1}{126}$$

3 צבעים ז"א 2 מצבע אחד ו-1 משני צבעים נותרים

$$P(X = 3) = \left(\frac{\binom{4}{2} \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{2} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{2} }{\binom{9}{4}} \right) = \frac{4}{7} = \frac{72}{126}$$

את הסיכוי ל-2 צבעים במדגם נחשב לפי ההשלמה ל-1:

$$P(X = 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 3) = 1 - \frac{1}{126} - \frac{72}{126} = \frac{53}{126}$$

ב. סופרים כמה ירוקים עלו במדגם, אז ירוקים הם "מיוחדים", שלפנו 4 מתוך 9 סה"כ,

ולכן: $Y \sim \text{HG}(b = 5 \text{ not green}, a = 4 \text{ green}, n = 4)$

$$P(Y = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{5}{4-k}}{\binom{9}{4}} \quad \text{ההתפלגות:}$$

4. שני חברים חזרו הביתה לאחר לילה של שתייה מופרזת. לכל אחד מהם צרור של 10 מפתחות והוא מנסה לפתוח את דלת ביתו. כל אחד מנסה את המפתחות בסדר מקרי. שיכור א' צלול מספיק כדי לא לנסות שוב מפתח שאינו מתאים ואילו שיכור ב' מחזיר כל מפתח לצרור ועלול לנסות אותו שוב. יהי X – מס' הניסיונות של שיכור א' עד שיצליח לפתוח את הדלת, Y – מס' הניסיונות של שיכור ב'. כיצד מתפלג X ? כיצד מתפלג Y ?

פתרון:

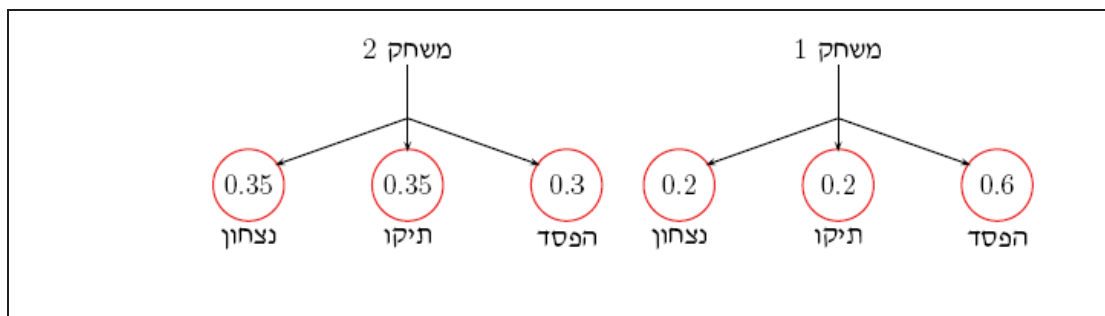
נתחיל משיכור א': שיכור א' מבצע בחירת מפתחות ללא החזרה ולכן:
 $P(X = 1) = \frac{1}{10}$; $P(X = 2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$; $P(X = 3) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$
 וכן הלאה... ז"א שלכל $k \geq 1$: $P(X = k) = \frac{1}{10}$ ולכן $X \sim U[1,10]$

שיכור ב':

שיכור ב' שולף מפתחות עם החזרה ולכן הסיכוי להצלחה בכל ניסוי הוא $\frac{1}{10}$ אך מס' הניסיונות עלול להיות אינסופי, ז"א ש- Y הוא מס' הניסיונות עד להצלחה ראשונה ולכן $Y \sim G(\frac{1}{10})$

5. לקבוצת כדורגל מתוכננים שני משחקים. יש לה סיכוי 0.4 לא להפסיד את המשחק הראשון, ו-0.7 לא להפסיד את המשחק השני, (באופן ב"ת במשחק הראשון). עבור כל משחק, אם איננה מפסידה, יש לה סיכוי שווה לתיקו ולניצחון (באופן ב"ת במשחק השני). הקבוצה מקבלת 2 נקודות לניצחון, נקודה לתיקו ו-0 נקודות להפסד. מצאו את התפלגות מס' הנקודות של הקבוצה

פתרון:



נסמן את מס' הנקודות של הקבוצה ב- X .

$$P(X = 0) = P(\{l, l\}) = 0.6 * 0.3 = 0.18$$

$$P(X = 1) = P(\{t, l\}, \{l, t\}) = 0.6 * 0.35 + 0.2 * 0.3 = 0.27$$

$$P(X = 2) = P(\{l, w\}, \{w, l\}, \{t, t\}) = 0.6 * 0.35 + 0.2 * 0.3 + 0.2 * 0.35 = 0.34$$

$$P(X = 3) = P(\{w, t\}, \{t, w\}) = 0.2 * 0.35 + 0.35 * 0.2 = 0.14$$

$$P(X = 4) = P(\{w, w\}) = 0.2 * 0.35 = 0.07$$

סה"כ אכן מקבלים:

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.18 + 0.27 + 0.34 + 0.14 + 0.07 = 1$$

6. שירלי מחפשת סוג מסוים של ג'ינס הנמצא ב-1/5 מהחנויות. היא מחליטה לחפש עד שתמצא – אך בכל מקרה לא לנסות יותר מ-4 חנויות. נסמן ב- X את מספר החנויות בהן ביקרה.

- א. מה הסיכוי שלא תמצא את הג'ינס הרצוי?
- ב. מה פונקציית ההסתברות של X ?
- ג. אם הייתה מחליטה להמשיך לחפש עד שהייתה מוצאת, כיצד היה מתפלג X ?
- ד. מה התפלגות X אם הייתה מחליטה לחפש עד שהייתה מוצאת 7 ג'ינסים?

פתרון:

ראשית נשים לב שמספר החנויות בהן היא מבקרת איננו מתפלג גיאומטרית כיוון שהוא חסום ב-4. א. היא לא תמצא את הג'ינס הדרוש אם בכל 4 החנויות הוא איננו וההסתברות לכך היא:

$$0.8^4 = 0.409$$

ב. ההתפלגות:

$$P(X = 1) = 0.2$$

$$P(X = 2) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$$

$$P(X = 3) = 0.8^2 \cdot 0.2 = 0.128$$

$$P(X = 4) = P(X > 3) = 0.8^3 = 0.512$$

ג. במקרה זה $X \sim G(0.2)$.

ד. במקרה זה X מתפלג בינומית שלילית: $X \sim NB(7, 0.2)$.