

פתרון תרגיל בית 6:

1. הרכב הסטודנטים בתואר הראשון הנו כלהלן: 50% בשנה א', 30% בשנה ב', 20% בשנה ג'. 20% משנה א' נשואים, 30% משנה ב' נשואים ו-40% משנה ג' נשואים.
א. פוגשים סטודנט תואר ראשון באקראי, מה הסיכוי שהוא נשוי?
ב. פוגשים סטודנט תואר ראשון נשוי באקראי, מה הסיכוי שהוא בשנה ג'?

פתרון:

א. נוסחת ההסתברות השלמה:

$$\begin{aligned} P(\text{married}) &= P(\text{married} | \text{first year})P(\text{first year}) \\ &+ P(\text{married} | \text{second year})P(\text{second year}) \\ &+ P(\text{married} | \text{third year})P(\text{third year}) = \\ &= 0.2 * 0.5 + 0.3 * 0.3 + 0.4 * 0.2 = 0.27 \end{aligned}$$

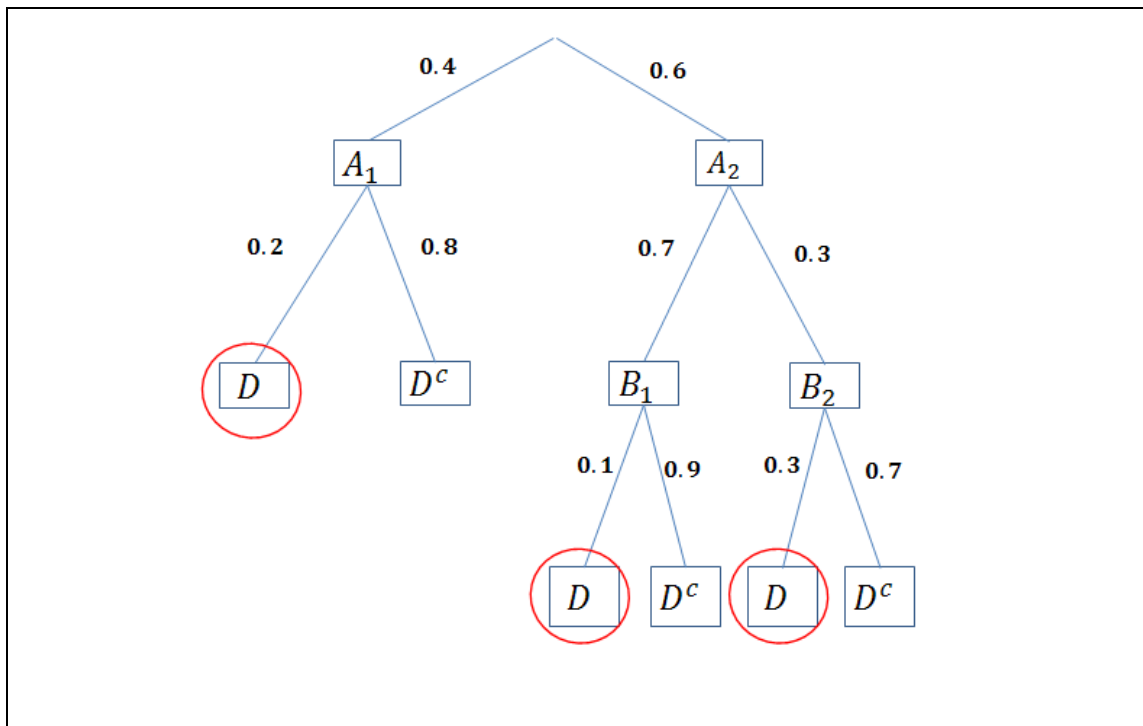
ב. מחפשים את $P(\text{third year} | \text{married})$: נשתמש בחוק בייז :

$$P(\text{third year} | \text{married}) = \frac{P(\text{married} | \text{third year})P(\text{third year})}{P(\text{married})} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.27} = \frac{8}{27}$$

2. ספק שבבים אלקטרוניים מקבל תוצרת של שני מפעלים. מפעל א' מספק 40% מהסחורה ומפעל ב' מספק 60% ממנה. מנסיון העבר ידוע כי 20% מהשבבים שמיוצרים במפעל א' פסולים. במפעל ב' מנוהלת העבודה בשתי משמרות כאשר בין השבבים שמוינו במשמרת יום יש כ-10% פסולים ובין אלה שמוינו במשמרת הלילה יש כ-30% פסולים. במשמרת היום מיוצרים כ-70% מהשבבים.
א. רשמו את המאורעות המעורבים בבעיה, הסתברויותיהם, ובנו עץ הסתברויות מתאים.
ב. מהי ההסתברות לשבב פסול אצל הספק?
ג. מהי ההסתברות ששבב שנמצא פסול יוצר במפעל א'?
ד. מהי ההסתברות ששבב שנמצא פסול יוצר במשמרת היום של מפעל ב'?
ה. מהי ההסתברות ששבב שנמצא פסול יוצר במשמרת הלילה של מפעל ב'?

פתרון:

- א. נסמן: A_1 – השבב יוצר במפעל א'
 A_2 – השבב יוצר במפעל ב'
 B_1 – השבב יוצר במשמרת היום
 B_2 – השבב יוצר במשמרת הלילה
D – השבב פסול
תרשים עץ :



ב. בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה (הענפים המסומנים בעץ) :

$$P(D) = 0.4 * 0.2 + 0.6 * 0.7 * 0.1 + 0.6 * 0.3 * 0.3 = 0.176$$

$$P(A_1|D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.4 * 0.2}{0.176} = \frac{80}{176} \quad \text{ג.}$$

$$P(B_1|D) = \frac{P(B_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.6 * 0.7 * 0.1}{0.176} = \frac{42}{176} \quad \text{ד.}$$

$$P(B_2|D) = \frac{P(B_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.6 * 0.3 * 0.3}{0.176} = \frac{54}{176} \quad \text{ה.}$$

(אכן 3 ההסתברויות מסתכמות ל-1)

3.

א. יהיו A, B מאורעות כך ש- $P(A) = 0.4, P(B) = 0.5, P(A \cup B) = 0.6$, האם A, B זרים? האם הם ב"ת?

ב. A, B מאורעות ב"ת כך ש- $P(A) = \alpha, P(B) = \beta$. מצאו את $P(A \cup B)$.

ג. A, B זרים בעלי הסתברות חיובית. האם הם ב"ת? הוכיחו או הפריכו.

פתרון:

א. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.6 = 0.3$. כיוון ש- $P(A \cap B) > 0$ הם לא זרים. כמו כן: $P(A \cap B) = 0.3 \neq 0.2 = 0.4 * 0.5$ לכן הם תלויים.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \alpha + \beta - \alpha\beta \quad \text{ב.}$$

ג. הטענה נכונה.

אם A, B זרים אז $P(A \cap B) = 0$. מצד שני לשניהם הסתברות חיובית לכן $P(A)P(B) > 0$ לכן הם בהכרח תלויים. (אינטואיטיבית: לדעת ש- B למשל קרה, נותן את כל המידע לגבי A : הם זרים ולכן בהכרח A לא קרה)

4. במשפחה n ילדים (הסיכויים לבן ולבת שווים). נגדיר מאורעות:

A - במשפחה לפחות בן אחד ולפחות בת אחת

B - במשפחה לכל היותר בת אחת

א. האם המאורעות תלויים עבור $n = 2$?

ב. האם המאורעות תלויים עבור $n = 3$?

ג. הראו כי עבור $n > 3$ המאורעות בהכרח תלויים.

פתרון:

$$P(A) = 1 - \frac{2}{2^n} \quad (\text{המאורע המשלים הוא "רק בנים או רק בנות" ז"א "רק בנים" } 2X)$$

$$P(B) = \frac{n+1}{2^n} \quad (\text{או שיש 0 בנות ואז } P(n \text{ boys}) = \frac{1}{2^n} \text{ או שיש בת אחת ואז: } P(1 \text{ girl}) = \frac{\binom{n}{1}}{2^n})$$

$$P(A \cap B) = P(\text{at least 1 boy \& exactly 1 girl}) = P(\text{exactly 1 girl}) = \frac{n}{2^n}$$

לכן נקבל כי המאורעות ב"ת אם"ם :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow (2^n - 2)(n + 1) = n2^n \Leftrightarrow 2^n = 2(n + 1) \Leftrightarrow n = 3$$

5. סיגנל בינארי מועבר במערכת רועשת. אם הסיגנל הוא 0, הסיכוי שיועבר בטעות ערך 1, היא q_0 ואילו

אם הסיגנל הוא 1, הסיכוי שיועבר בטעות 0 היא q_1 .

א. נניח שהמקור משדר 0 בהסתברות p ו-1 בהסתברות $1 - p$, מה ההסתברות שיתקבל הסיגנל הנכון?

- בסעיפים הבאים הניחו אי תלות בין השידורים
- ב. מה ההסתברות לשדר 1011 ללא טעויות?
- ג. במאמץ לשפר את אמינות המערכת משדרים כל סיגנל 3 פעמים והוא מפוענח לפי רוב (אם הרוב הוא "1" אז יפוענח "1" ולהיפך). מה הסיכוי ש-0 מפוענח כראוי?
- ד. בנתוני סעיף ג', נניח שהמקור משדר 0 בהסתברות p ו-1 בהסתברות $1 - p$, אם נתון שהתקבל השדר "101" מה הסיכוי שהשדר המקורי היה "0"?

פתרון:

א. נגדיר את המאורע שהאות שהתקבל נכון ב-R והאות שהתקבל שגוי ב-W.

$$P(R) = P(R|0)P(0) + P(R|1)P(1) = (1 - q_0)p + (1 - q_1)(1 - p)$$

ב. בכדי לשדר 1011 ללא טעויות צריך שכל השדרים של 1 יעברו נכון וכל השדרים של 0 יעברו נכון: (תחת הנחת אי תלות)

$$P(1011 \text{ correct}) = (1 - q_1)(1 - q_0)(1 - q_1)(1 - q_1) = (1 - q_0)(1 - q_1)^3$$

ג. בכדי ש-0 יעבור נכון צריך שלפחות פעמיים יתקבל האות 0 ולכן יש 2 מצבים אפשריים, הראשון - 0 התקבל פעמיים, והשני - 0 התקבל 3 פעמים:

$$\binom{3}{2} (1 - q_0)^2 q_0 + (1 - q_0)^3$$

ד. נשתמש בחוק בייז :

$$P(0|101) = \frac{P(101|0)P(0)}{P(101)}$$

נמצא את $P(101)$ עם נוסחת ההסתברות השלמה :

$$P(101) = P(101|0)P(0) + P(101|1)P(1) = (1 - q_0)q_0^2p + (1 - q_1)^2q_1(1 - p)$$

ולכן:

$$P(0|101) = \frac{P(101|0)P(0)}{P(101)} = \frac{(1 - q_0)q_0^2p}{(1 - q_0)q_0^2p + (1 - q_1)^2q_1(1 - p)} =$$

6. נניח כי מטילים זוג קוביות מאוזנות, אדומה וכחולה. נתבונן במאורעות הבאים:

A – בקובייה האדומה מס' אי-זוגי

B – בקובייה הכחולה מס' אי-זוגי

C – סכום שתי התוצאות הוא אי-זוגי

האם המאורעות A, B, C ב"ת? האם הם ב"ת בזוגות?

פתרון:

לשלושת המאורעות הסתברויות שוות: $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. המאורעות A, B ב"ת כי מתייחסים

לשתי קוביות שונות. המאורע C ב"ת ב- A : בהינתן המאורע A (באדומה מס' אי זוגי) הרי שמאורע C

(סכום אי זוגי) יתרחש רק אם בקובייה הכחולה יתקבל מס' זוגי ולכן: $P(C|A) = \frac{1}{2} = P(C)$. ובאותו אופן

המאורעות B, C ב"ת. לכן המאורעות ב"ת בזוגות.

נותר לבדוק האם C ב"ת ב- $A \cap B$: קל לראות כי: $P(A \cap B \cap C) = 0$ ולכן לא שווה למכפלת

ההסתברויות