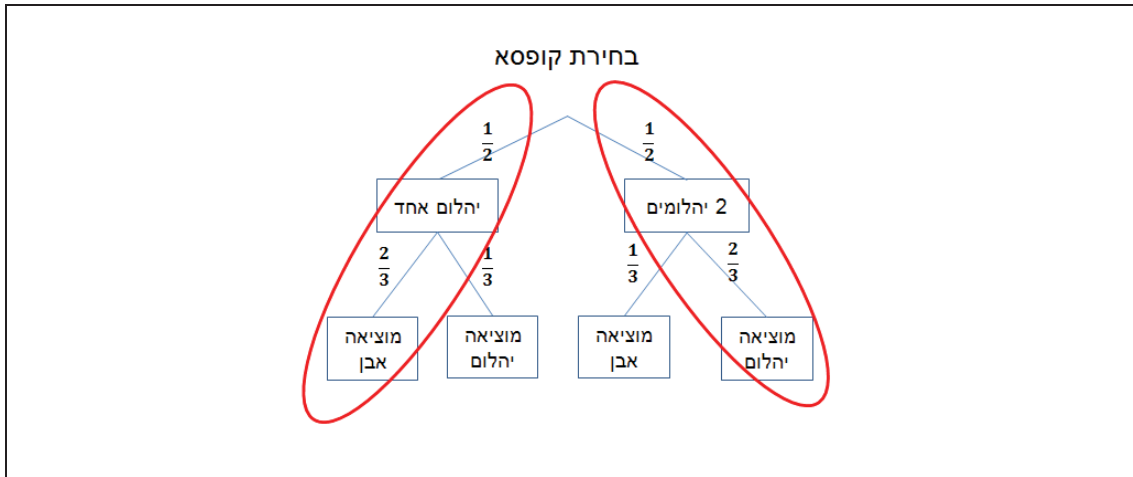


פתרון תרגיל בית 5 :

1. יהלומן מחליט לתת לבתו מתנה. הוא מציג לה שתי קופסאות, באחת 2 יהלומים ואבן פשוטה ובשניה יהלום אחד ושתי אבנים פשוטות. היהלומן מרשה לבתו להוציא אבן אחת מקופסא שנבחרה באקראי ואז (אחרי שהחזירה אותה לקופסא) להחליט באיזו קופסא לבחור. הבת החליטה שאם הוציאה יהלום היא תישאר עם הקופסא הנוכחית ואם תוציא אבן פשוטה תחליף. מה הסיכוי שהיא תקבל 2 יהלומים?

פתרון:

נבנה עץ הסתברויות:



$$P(2 \text{ diamonds}) = P(\text{right box} \cap \text{diamond}) + P(\text{wrong box} \cap \text{stone}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2. קובייה הוגנת הוטלה פעמיים. חשבו את ההסתברות שהמספרים שהתקבלו בשתי ההטלות זהים, אם ידוע ש:

- אם ידוע שהסכום היה 6
- אם ידוע שהסכום לכל היותר 6
- אם ידוע שהסכום גבוה מ-6
- עתה הסיקו מה ההסתברות שהמספרים שהתקבלו בשתי ההטלות שונים זה מזה, תחת כל אחת מההנחות א-ג

פתרון:

- יש רק אפשרות אחת מתוך 5 אפשרויות לסכום 6: פעמיים 3 לכן: $\frac{1}{5}$
- יש 3 אפשרויות למספרים זהים מתוך כל הזוגות עם סכום לכל היותר 6: $\frac{3}{15}$
- יש 3 אפשרויות להטלות עם מס' זהים וסכום גבוה מ-6: $\frac{3}{21}$ לכן: $\frac{3}{21}$
- מדובר במשלימים של כל אחת מההסתברויות

3. על אדם שהגיש מועמדות לתפקיד מסוים היה עד כה לעבור מבחן גרפולוגי ומבחן פסיכומטרי. מנתונים סטטיסטיים ידוע כי: ההסתברות לעבור בהצלחה את המבחן הגרפולוגי

- (מאורע A) היא 0.3, ההסתברות לעבור בהצלחה את המבחן הפסיכומטרי (מאורע B) היא 0.2, ההסתברות לעבור בהצלחה את שני המבחנים היא 0.1
- א. חשבו את ההסתברויות: $P(A|B), P(A|B^c), P(A^c|B), P(A^c|B^c)$, מצאו קשרים ביניהן.
- ב. מועמד מסוים לא התקבל לעבודה בתנאים אלו. מה ההסתברות שהוא נכשל רק במבחן הגרפולוגי?
- ג. הוחלט שמעתה כדי להתקבל לעבודה על מועמד לעבור בשלב הראשון את המבחן הגרפולוגי ואת המבחן הפסיכומטרי, ובשלב השני כל העובר מבחנים אלו יוזמן לראיון אישי. מבין המגיעים לראיון רק 70% יתקבלו (מאורע C). מה יהיה אז הסיכוי של מועמד להתקבל לעבודה?

פתרון:

	A	A^c	
B	0.1	0.1	0.2
B^c	0.2	0.6	0.8
	0.3	0.7	

א. חישוב ההסתברויות

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{6}{8}, \quad P(A|B^c) = 1 - P(A^c|B^c) = \frac{2}{8}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2}, \quad P(A^c|B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ב. אדם לא התקבל. מה הסיכוי שנכשל רק ב-A?

$$P(A^c \cap B|A^c \cup B^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c \cup B^c)} = \frac{0.1}{0.7 + 0.8 - 0.6} = \frac{0.1}{0.9} = \frac{1}{9}$$

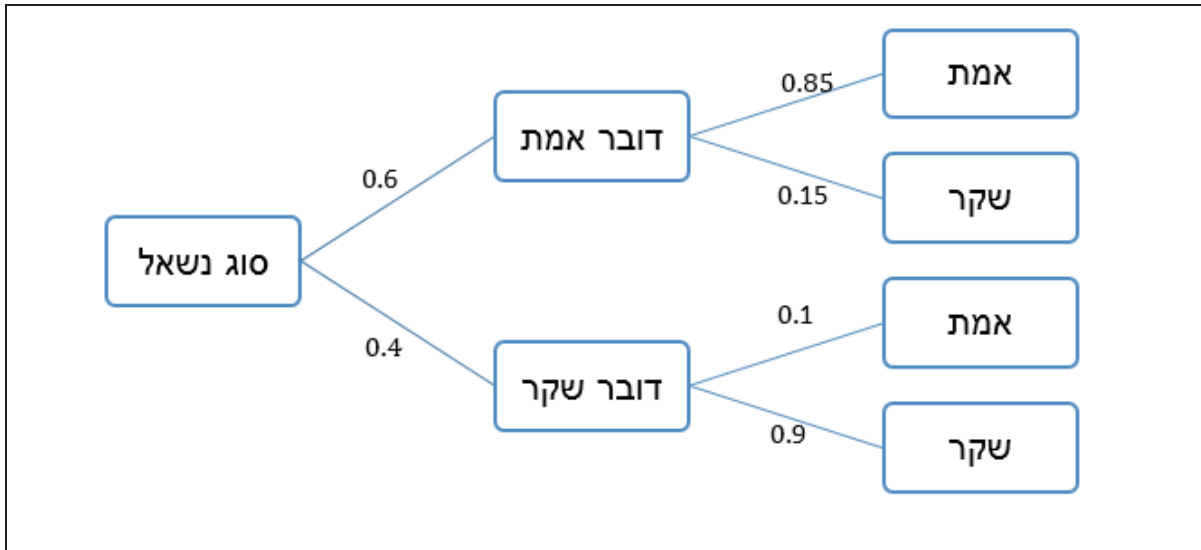
ג. כעת יש לעבור את 2 המבחנים + ראיון שאותו עוברים בסיכוי 0.7. מה הסיכוי להתקבל?

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) = 0.3 \cdot \left(\frac{0.1}{0.3}\right) \cdot 0.7 = 0.07$$

4. פוליגרף מגלה שקרנים ב-90% מהמקרים (כלומר אם הוא בודק שקרן בהסתברות 0.9 הפוליגרף יזהה אותו כשקרן ובהסתברות 0.1 יטעה ויאמר שהוא דובר אמת). הפוליגרף מזהה דוברי אמת ב-85% מהמקרים. בהנחה ש-60% מהנבדקים הם דוברי אמת, חשבו את ההסתברות שאדם שאובחן כשקרן הוא אכן שקרן.

פתרון:

נצייר עץ:



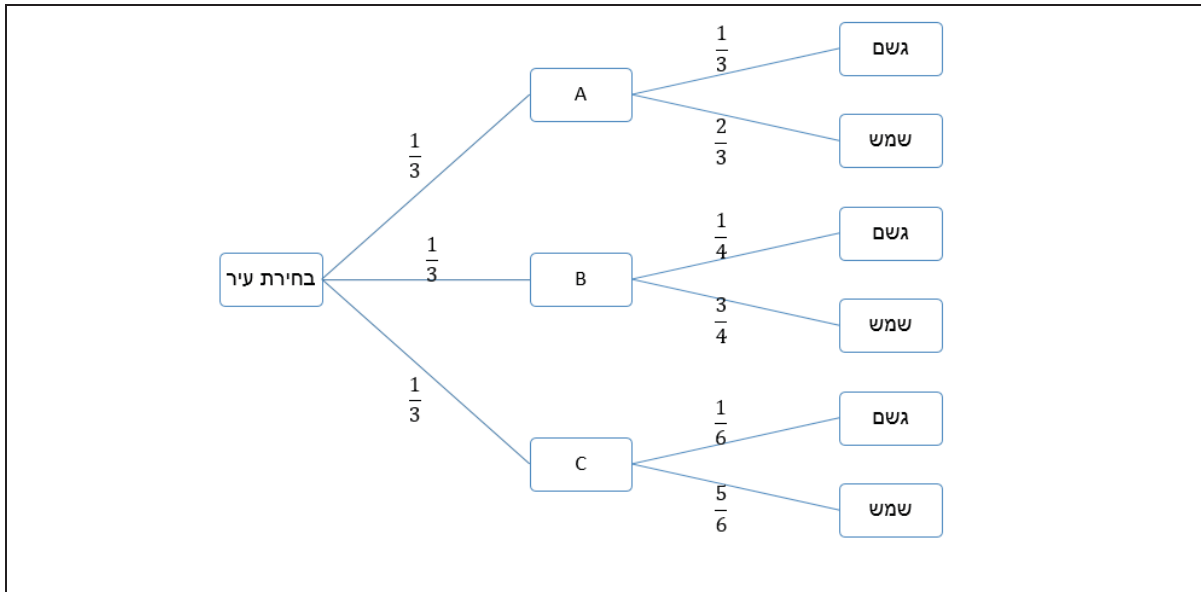
ואז:

$$P(\text{liar} | \text{machine says liar}) = \frac{P(\text{liar} \cap \text{machine says liar})}{P(\text{machine says liar})} = \frac{0.9 \cdot 0.4}{0.9 \cdot 0.4 + 0.15 \cdot 0.6} = 0.8$$

5. אדם בוחר באופן מקרי באחת משלוש ערים A, B, C. ההסתברות שב A ירד גשם היא $1/3$. ההסתברות לגשם ב B היא $1/4$, וההסתברות לגשם ב C היא $1/6$. הוא חזר כשמכוניתו רטובה, מהי ההסתברות שביקר בעיר C?

פתרון:

נצייר עץ:



$$P(C | \text{rain}) = \frac{P(\text{rain} | C)P(C)}{P(\text{rain})}$$

$$P(\text{rain}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(C|\text{rain}) = \frac{P(\text{rain}|C)P(C)}{P(\text{rain})} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{9}$$

6. בתחילת כל שבוע יש בארזנו של דני 5 חולצות נקיות. בכל בוקר דני לובש חולצה שבחר באקראי, ובערב הוא מחזיר אותה לארון.

נגדיר A_i - המאורע שדני לובש חולצה נקייה ביום i

תאר במילים מהו $\bigcap_{i=1}^5 A_i$ וחשב את הסתברותו

(אפשר למשל בעזרת כלל השרשרת)

פתרון:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A) \quad \bigcap_{i=1}^5 A_i \text{ דני לבש בימים ראשון עד חמישי חולצה נקייה. נעזר בנוסחא}$$

כמה פעמים.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^5 A_i\right) &= P\left(A_5 \mid \bigcap_{i=1}^4 A_i\right) * P\left(\bigcap_{i=1}^4 A_i\right) = P\left(A_5 \mid \bigcap_{i=1}^4 A_i\right) * P\left(A_4 \mid \bigcap_{i=1}^3 A_i\right) * P\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = \dots \\ &= P\left(A_5 \mid \bigcap_{i=1}^4 A_i\right) * P\left(A_4 \mid \bigcap_{i=1}^3 A_i\right) * P\left(A_3 \mid \bigcap_{i=1}^2 A_i\right) * P\left(A_2 \mid A_1\right) * P\left(A_1\right) \end{aligned}$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^5 A_i\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{5} \quad \text{ונקבל:}$$