פתרון תרגיל בית 4:

1. מטילים קוביה שאינה בהכרח הוגנת. נתון שקיים קבוע $C > 0$ עבורו $P("i") = \frac{C}{i},\ i = 1, \dots, 6$

מצאו את C

פתרון:

סכום ההסתברויות של כל הפאות הוא 1 לכן:

$$1 = P(1) + \cdots + P(6) = \sum_{i=1}^{6} \frac{C}{i} = C \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i} = 2.45C \iff \quad C = 0.408$$

2. סטודנט עובר בדרכו לאוניברסיטה 3 רמזורים סה"כ. הסיכוי שלא יהיה אף רמזור אדום הוא 0.4, הסיכוי שיהיה אדום אחד הוא 0.1 והסיכוי שיהיו 2 אדומים הוא 0.2. מה ההסתברות של המאורעות הבאים:
A – לפחות רמזור אדום אחד
B - לפחות רמזור ירוק אחד
C - מס' אי זוגי של רמזורים אדומים
D - לכל היותר רמזור ירוד אחד

פתרון :

מאורע A :

A = {לפחות אדום אחד} = {אף רמזור אדום}^c לכן :

$$P(A) = P(\{no\ red\ lights\}^c) = 1 - P(\{\ 0\ red\ lights\}) = 1 - 0.4 = 0.6$$

מאורע B :

{לפחות ירוק אחד} = {לכל היותר 2 אדומים} = {0 אדומים}+{אדום אחד}+{2 אדומים}

$$P(B) = P(0\,red) + P(1\,red) + P(2\,red) = 0.4 + 0.1 + 0.2 = 0.7$$

מאורע C :

{מס' אי-זוגי של אדומים} = {אדום אחד}+{3 אדומים}

$$P(C) = P(1\,red) + P(3\,red) = 0.1 + (1 - 0.4 - 0.1 - 0.2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

מאורע D:

{לכל היותר ירוק אחד} = {לכל הפחות 2 אדומים}

$$\mathrm{P}(D) = P(2\,red\ ) + P(3\,red) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

3. בקו תעופה פועלים מטוסים דו-מנועיים. ב-23% מהטיסות יש תקלה במנוע, ב-10% מהטיסות יש תקלה במנוע הימני וב-15% מהטיסות יש תקלה במנוע השמאלי.
   א. מה הסיכוי שתהיה תקלה בשני המנועים יחד?
   ב. מה הסיכוי שתהיה תקלה במנוע אחד בלבד?

פתרון:

נסמן: A – תקלה במנוע ימני, B – תקלה במנוע השמאלי.

לכן נתון: $P(A) = 0.1, P(B) = 0.15,$

$$P(A \cup B) = 0.23 \Rightarrow P(A^c \cap B^c) = 0.77$$

	A	A^c	
B	0.02	0.13	0.15
B^c	0.08	0.77	0.85
	0.1	0.9	

מהטבלה נמצא את שני הגדלים:

א. תקלה בשני המנועים משמעה החיתוך:

$$P(A \cap B) = 0.02$$

ב. תקלה בדיוק באחד:

$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = 0.08 + 0.13 = 0.21$$

4. בוחרים באופן מקרי מספר 6 ספרתי. מהי ההסתברות שגם הספרה 0 מופיעה לפחות פעם אחת וגם הספרה 2 מופיעה לפחות פעם אחת?

פתרון:

מרחב המדגם: $|\Omega| = 9 \cdot 10^5$ כיוון שכל ספרה יכולה להיבחר כראשונה פרט ל-0.

נגדיר מאורע: A_0 – הספרה 0 מופיעה, A_2 – הספרה 2 מופיעה

רוצים את $P(A_0 \cap A_2)$.

$$P(A_0 \cap A_2) = P(A_0) + P(A_2) - P(A_0 \cup A_2)$$

$$P(A_0) = 1 - \frac{9^6}{9 \cdot 10^5}\ ,\ \ P(A_2) = 1 - \frac{8 \cdot 9^5}{9 \cdot 10^5}$$

הסבר: $\mathrm{P}(A_0)$: אסור לבחור בספרה 0 באף מקום במספר לכן לכל ספרה 9 אפשרויות. $\mathrm{P}(A_2)$: לספרה ראשונה אסור לבחור את 0 ולא את 2, ובכל השאר אסור רק את 2 לכן יש 9 אפשרויות.

$$P(A_0 \cup A_2) = 1 - \frac{8^6}{9 \cdot 10^5}$$

לכל בחירת ספרה יש 8 אפשרויות (אסור לבחור את 2 ולא את 0)

סה"כ:

$$P(A_0 \cap A_2) = 1 - \frac{9^6}{9 \cdot 10^5} + 1 - \frac{8 \cdot 9^5}{9 \cdot 10^5} - \left(1 - \frac{8^6}{9 \cdot 10^5}\right)$$

5. N זוגות מתיישבים בשורה. מה הסיכוי שאף אישה לא תשב ליד בעלה?

פתרון:

נגדיר מאורע: A_i – הזוג ה-i יושב יחד. מחפשים את: $P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i^c\right)$.

$P(A_i) = \frac{(2N-1)!2!}{(2N)!}$ כי מתייחסים אל זוג i כאל בלוק ואז סה"כ מסדרים $2\mathrm{N} - 1$ עצמים בשורה, ומכפילים בסידור הפנימי של הבלוק.

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(2N-2)!\,(2!)^2}{(2N)!}$$

מתייחסים אל שני הזוגות שיחד כאל 2 בלוקים לכן סה"כ מסדרים 2N − 2 עצמים בשורה ומכפילים בשני סידורים פנימיים של 2 בלוקים.

באותו אופן עבור k זוגות יחד: $P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \frac{(2N-k)!(2!)^k}{(2N)!}$

סה"כ:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{N} A_k^c\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcup_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N}} A_k\right) = 1 - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \binom{N}{k} P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \binom{N}{k} \frac{(2N-k)!\,(2!)^k}{(2N)!}$$

6. בוחרים באקראי מילה בת 9 אותיות מהאותיות {a,b,c,d,e}. מה הסיכוי לכך שהמילה מכילה את כל האותיות?

פתרון:

גודל המדגם: 5^9 כיוון שבוחרים מתוך 5 האותיות עם החזרה ועם חשיבות לסדר.

נגדיר: A_i - האות ה-i לא מופיעה, $i = 1, \ldots, 5$. לכן רוצים את $P(A_1^c \cap \ldots \cap A_5^c)$.

$$P(A_i) = \frac{4^9}{5^9}\ ,\ \ P(A_i \cap A_j) = \frac{3^9}{5^9}\ , P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{2^9}{5^9}\ , P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) = \frac{1}{5^9}$$

$P(A_1 \cap \ldots \cap A_5) = 0$ מכיוון לא ניתן לא להשתמש באף אות.

סה"כ:

$$P(A_1^c \cap \ldots \cap A_5^c) = 1 - P(A_1 \cup \ldots \cup A_5) = 1 - \binom{5}{1}\frac{4^9}{5^9} - \binom{5}{2}\frac{3^9}{5^9} - \binom{5}{3}\frac{2^9}{5^9} - \binom{5}{4}\frac{1}{5^9}\ \approx 0.427$$

7. מסדרים את 10 הספרות 0 עד 9 בשורה. מהי ההסתברות שאין רצף של שבע (או יותר) ספרות עוקבות? (למשל התמורה 2034567891 פסולה בגלל הרצף המסומן).

פתרון:

מרחב המדגם: $10!$ כיוון שמסדרים 10 עצמים בשורה.

A_0 - מופיע הרצף 0123456
A_1 - מופיע הרצף 1234567
A_2 – מופיע הרצף 2345678
A_3 – מופיע הרצף 3456789

מחפשים את $P\left(\overline{A_0} \cap \ldots \cap \overline{A_3}\right)$

$P(A_i) = \frac{4!}{10!}$ מסדרים בלוק בגודל 7 ועוד 3 ספרות נוספות

$P(A_0 \cap A_1) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{3!}{10!}$ סידור בלוק בגודל 8 ועוד 2 ספרות בודדות

$P(A_0 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = \frac{2!}{10!}$ סידור בלוק בגודל 9 ועוד ספרה בודדת

$P(A_0 \cap A_3) = \frac{1}{10!}$ כיוון שכן הספרות מסודרות לפי הסדר 0123456789

$$P(A_0 \cap A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2!}{10!}$$

$$P(A_0 \cap A_1 \cap A_3) = P(A_0 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{10!}$$

סה"כ נקבל:

$$P\left(\overline{A_0} \cap \ldots \cap \overline{A_3}\right) = 1 - 4\frac{4!}{10!} + 3\frac{3!}{10!} + 2\frac{2!}{10!} + \frac{1}{10!} - 2\frac{2!}{10!} - 2\frac{1}{10!} + \frac{1}{10!} = 0.999978$$