פתרון תרגיל בית 3:

1. מתוך קבוצה של 12 סטטיסטיקאים ו-9 מתמטיקאים נבחרה ועדה של 6 אנשים. מה ההסתברות שבועדה יהיו בדיוק 3 סטטיסטיקאים? מה ההסתברות שכל אנשי הועדה הם סטטיסטיקאים?

פתרון:

מספר האפשרויות לבחור ועדה של 6 אנשים מתוך קבוצה ובה 12+9=21 אנשים הוא $\binom{21}{6}$.מספר האפשרויות לבחור את הועדה כך שיהיו בה 3 סטטיסטיקאים ולכן 3 מתמטיקאים הוא $\binom{12}{3}\binom{9}{3}$, ולכן ההסתברות שיהיו בועדה 3 סטטיסטיקאים היא $\frac{\binom{12}{3}\binom{9}{3}}{\binom{21}{6}}=\frac{110}{323}$. מספר האפשרויות לבחור 6 סטטיסטיקאים הוא $\binom{12}{6}$ ולכן ההסתברות שיהיו בועדה 6 סטטיסטיקאים היא $\frac{\binom{12}{6}}{\binom{21}{6}}$.

2. מתוך 10 זוגות גרביים בוחרים באופן מקרי 6 גרביים בודדות.
   א. מה ההסתברות שאין אף זוג שלם במדגם?
   ב. מה ההסתברות ששש הגרביים שהוצאו מהוות 3 זוגות שלמים?

פתרון:

סה"כ יש 20 גרביים, ולכן מספר האפשרויות לבחור מתוכן 6 גרביים הוא $\binom{20}{6}$.

א. כדי שלא יהיה אף זוג שלם צריך לבחור 6 זוגות לכך יש $\binom{10}{6}$ אפשרויות ומכל זוג גרביים שבחרנו יש לבחור נציג, לכן בכל זוג יש 2 אפשרויות וסה"כ יש $\binom{10}{6}2^6$. כלומר ההסתברות היא $\frac{\binom{10}{6}2^6}{\binom{20}{6}}$

ב. כדי שיהיו 3 זוגות שלמים, צריך פשוט לבחור את 3 הזוגות ולכך יש $\binom{10}{3}$ אפשרויות, ולכן ההסתברות היא $\frac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{6}}$.

3. סנטה קלאוס חילק N מתנות שונות ל-N ילדים (שונים). חשבו את הסתברות המאורעות הבאים:
   א. שמעון לא קיבל מתנה.
   ב. כל ילד קיבל מתנה.
   ג. יש ילד שלא קיבל מתנה.
   ד. בדיוק ילד אחד לא קיבל מתנה

פתרון:

א. שמעון לא קיבל מתנה, כעת לכל מתנה יש $N-1$ אפשרויות (לא שמעון) ולכן ההסתברות המבוקשת היא $\frac{(N-1)^n}{N^N}$.

ב. כל ילד קבל מתנה, לכן זו חלוקה כך שכל ילד מקבל בדיוק מתנה אחת, כלומר למתנה הראשונה N ילדים מועמדים, למתנה השנייה $N-1$ ילדים לבחור מתוכם (לא לחזור לראשון) וכולי, לכן סה"כ ההסתברות היא $\frac{N!}{N^N}$.

ג. זהו המשלים של סעיף ב... ולכן הסיכוי הוא $1-\frac{N!}{N^N}$.

ד. בדיוק ילד אחד לא קיבל מתנה, כלומר יש ילד אחד (מקופח) עם 0 מתנות, ילד אחד (מאושר) עם 2 מתנות, ולשאר הילדים מתנה אחת לכל ילד. מספר האפשרויות לכן: N אפשרויות לבחור את הילד המקופח, $N-1$ אפשרויות לבחור את הילד המאושר, $\binom{N}{2}$ אפשרויות לבחור לילד זה את המתנות ולבסוף $(N-2)!$ אפשרויות לחלק את יתר המתנות, מתנה לכל ילד. לכן סה"כ ההסתברות היא $\frac{N(N-1)\binom{N}{2}(N-2)!}{N^N}$.

4. מסדרים את המספרים 1,2...N בשורה.
   א. מה ההסתברות שהספרות 1,2 לא מופיעות אחת ליד השניה?
   ב. מה ההסתברות שהספרות 1,2 לא מופיעות אחת ליד השניה,והספרות 3,4 כן מופיעות אחת ליד השניה?

פתרון:

במרחב המדגם מסדרים N מספרים בשורה ולכן $|\Omega| = N!$.

א. נוח יותר לחשב את המשלים. במאורע המשלים 1,2 מופיעים אחד ליד השני, לסדר אותם יש *2!* אפשרויות, כעת נשארו $(N-2)!$ מספרים ובלוק אחד, סה"כ $N-1$ פריטים לסדר בשורה, ולכך $(N-1)!$ אפשרויות. כלומר ההסתברות המבוקשת היא $1-\frac{2(N-1)!}{N!}$.

ב. נסמן A – המספרים 1,2 אחד ליד השני. B – המספרים 3,4 אחד ליד השני. רוצים לחשב את ההסתברות $P(\overline{A}\cap B)$, נעזר בכך ש:

$$P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$$

מהסעיף הקודם ידוע ש: $P(B)=\frac{2(N-1)!}{N!}$, נותר לחשב את הסתברות החיתוך. במקרה זה נסדר את 1,2 כגוש ולכך $2!$ אפשרויות, נסדר את 3,4 כגוש ולכך $2!$ אפשרויות. כעת נשארו $(N-4)$ מספרים ושני בלוקים, סה"כ $(N-2)$ פריטים לסדר בשורה, ולכך $(N-2)!$ אפשרויות. כלומר $P(A\cap B)=\frac{2\cdot 2(N-2)!}{N!}$. ונקבל ש: $P(\overline{A}\cap B)=\frac{2(N-1)!}{N!}-\frac{2\cdot 2(N-2)!}{N!}$.

5. בוועידה בינלאומית יש 8 נציגים סביב שולחן עגול: ארה"ב, רוסיה, אנגליה, צרפת, אוסטרליה, סין, יפן והודו. נציג ארה"ב חייב לשבת ליד נציג רוסיה. כל שאר המקומות מקריים. תתעורר תקרית בינלאומית אם :

A - נציגי סין והודו יושבים זה ליד זה.
B - נציג סין יושב ליד נציג רוסיה.
חשבו את הסתברות המאורעות B,A , לפחות תקרית אחת, כל התקריות האפשריות.

פתרון:

$|\Omega| = 6!\,2!$ – 7 עצמים סביב שולחן וסידור פנימי של בלוק ארה"ב-רוסיה

$|A| = 5!\,2!\,2!$ – 2 בלוקים + 4 נציגים בודדים ושני סידורים פנימיים של הבלוקים

$|B| = 5!\,2!$ – סין רוסיה וארהב כבלוק שבתוכו יש רק 2 אפשרויות + 5 נציגים בודדים

$$P(A) = \frac{5!\,2!\,2!}{6!\,2!}, \qquad P(B) = \frac{5!\,2!}{6!\,2!}$$

$|A \cap B| = 4!\,2!$ – לרביעיה: (הודו-סין-רוסיה-ארהב) יש 2 סידורים אפשריים + 4 נציגים בודדים.

$$P(A \cap B) = \frac{4!\,2!}{6!\,2!}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5!\,2!\,2! + 5!\,2! - 4!\,2!}{6!\,2!}$$