פתרון תרגיל בית 2 :

1. א. בכמה אופנים שונים אפשר לסדר על מדף 3 ספרי כימיה, 4 ספרי פיזיקה ו-5 ספרי היסטוריה ?
ב. בכמה אופנים שונים אפשר לסדר את הספרים כך שהספרים מכל תחום יעמדו יחד?

פתרון:

א. יש סה"כ $3+4+5=12$ ספרים שונים לכן סה"כ : $12!$
ב. בעצם רוצים 3 "בלוקים" של תחומים לכן לכך יש $3!$ אפשרויות ("היסטוריה" "פיזיקה" כימיה",...) סידורים פנימיים של כל "בלוק" :
לסידור 5 ספרי היסטוריה יש $5!$ אפשרויות, לסידור 4 ספרי פיזיקה יש $4!$ אפשרויות, לסידור 3 ספרי כימיה יש $3!$ אפשרויות

לכן סה"כ : $3!\cdot 5!\cdot 4!\cdot 3!=103{,}680$ אפשרויות.

2. הוכיחו את הזהויות הבאות באמצעות סיפור:
א. $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
ב. $\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}$

פתרון:

א. אגף שמאל: 2^n הוא מס' כל תתי הקבוצות האפשריות של קבוצה בת n פריטים. (כלומר מס' האפשרויות לבחור תת קבוצה כלשהי מתוך קבוצה בת n פריטים)
אגף ימין: רוצים לבחור תת קבוצה כלשהי של קבוצה בת n פריטים.נחלק ל-n מקרים זרים: במקרה ה-k מניחים כי תת הקבוצה שבוחרים היא בגודל k לכן $\binom{n}{k}$.
ב. אגף ימין: מס' האפשרויות לבחור k פריטים מתוך קבוצה של $(m+n)$ פריטים.
אגף שמאל: כאן יש חלוקה ל- k מקרים זרים: במקרה ה- i בוחרים i פריטים מבין ה- m הראשונים ואת השאר $(k-i)$ מבין ה- n הנותרים סה"כ $\binom{m}{i}\binom{n}{k-1}$.

3. בכד יש 20 כדורים. 8 שחורים, 7 אדומים ו-5 לבנים. מוציאים באופן מקרי 8 כדורים. את מס' האפשרויות שבכל אחד מהמאורעות הבאים:
א. מרחב המדגם
ב. הוצאו 6 שחורים ו-2 לבנים
ג. הוצאו 3 שחורים, 2 אדומים ו-3 לבנים
ד. הוצא לפחות כדור לבן אחד

פתרון :

א. מרחב המדגם : מס' האפשרויות להוציא 8 כדורים מתוך 20 : $|\Omega|=\binom{20}{8}$

ב. נסמן את המאורע ב-A . אז : $|A|=\binom{8}{6}\binom{5}{2}$

ג. נסמן את המאורע ב-B . אז : $|B|=\binom{8}{3}\binom{7}{2}\binom{5}{3}$

ד. נסמן את המאורע ב-C . נשים לב ש: C^c = לא הוצאו לבנים כלל. אם לא מוציאים לבנים כלל ז"א שמוציאים 8 כדורים מתוך 15 (8 שחורים+7 אדומים) סה"כ :

$$|C| = |\Omega| - |C^c| = \binom{20}{8} - \binom{15}{8}$$

4. בחפיסת קלפים יש 52 קלפים: 4 צורות (לב, תלתן, יהלום, ועלה), מכל צורה יש 13 מספרים. בוחרים 5 קלפים מתוך החפיסה.

א. כמה אפשרויות יש במרחב המדגם?

ב. כמה אפשרויות יש לפול-האוס? (זוג ושלישייה)

ג. כמה אפשרויות יש לזוגיים? (2 זוגות של מספרים שונים + קלף עם מס' שונה מהם)

פתרון:

א. מרחב המדגם: מס' האפשרויות לבחור 5 קלפים מתוך 52 הוא $|\Omega| = \binom{52}{5}$

ב. נסמן את המאורע ב- A . רוצים זוג ושלשה. תחילה נבחר את המספר שממנו נקח זוג : $\binom{13}{1}$.
כעת נבחר אילו צורות יהיו בזוג : $\binom{4}{2}$. לאחר מכן נבחר את המספר שממנו נקח שלשה:
$\binom{12}{1}$ (מס' שונה מהמספר של הזוג) . לבסוף נבחר צורות לשלשה: $\binom{4}{3}$. סה"כ:

$$|A| = \binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{3}$$

ג. נסמן את המאורע ב- B. תחילה נבחר 2 מספרים לשני הזוגות: $\binom{13}{2}$. נבחר את הצורות לכל אחד מהזוגות: $\binom{4}{2}\binom{4}{2}$. כעת נותר לבחור קלף בודד עם מספר שונה משל הזוגות: $\binom{44}{1}$. (יש 2 מספרים שאסור לבחור בהם, וכל מספר מופיע 4 פעמים בחפיסה לכן סה"כ 44=52-8)

$$|B| = \binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{1}$$

5. בוחרים באקראי קוד באורך 6 ספרות מתוך 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 . (מותר שהספרה 0 תופיע משמאל)

א. כמה קודים אפשריים יש?

ב. כמה קודים יש בהם 0 מופיע בדיוק פעם אחת?

ג. כמה קודים יש בהם 0 מופיע לפחות פעם אחת?

ד. כמה קודים יש בהם 2 מופיע לפחות פעמיים?

ה. כמה קודים יש בהם 0 ו-2 מופיעים לפחות פעם אחת?

פתרון:

א. מרחב המדגם: $|\Omega| = 10^6$ (לכל אות בקוד יש 10 אפשרויות לספרות)

ב. נסמן את המאורע ב-A. אז : $|A| = \binom{6}{1}9^5$ כיוון שבוחרים את המקום לספרה 0 ואז לכל אחד משאר 5 המקומות יש 9 אפשרויות בלבד.

ג. נסמן את המאורע ב-B. ונחשב לפי המשלים: B^c – 0 לא מופיע כלל.

$$|B| = |\Omega| - |B^c| = 10^6 - 9^6$$

ד. נסמן את המאורע ב- C. נחשב לפי המאורע המשלים :

C^c – 2 לא מופיע או 2 מופיע פעם אחת.

מס' האפשרויות לקוד ללא הספרה 2 הוא 9^6

מס' האפשרויות לקוד כאשר 2 מופיע פעם אחת הוא כמו בסעיף א' : $\binom{6}{1}9^5$

לכן סה"כ : $|C| = |\Omega| - |C^c| = 10^6 - \left(9^6 + \binom{6}{1}9^5\right)$

ה. רוצים את גודל המאורע: {2 לפחות פעם אחת} ∩ {0 לפחות פעם אחת}
נסמן: D_0 – 0 מופיע לפחות פעם אחת , D_2 – 2 מופיע לפחות פעם אחת
ז"א שמחפשים את $D_0 \cap D_2$.

$$|D_0 \cap D_2| = |\Omega| - |(D_0 \cap D_2)^c| = 10^6 - |D_0^c \cup D_2^c| = 10^6 - (|D_0^c| + |D_2^c| - |D_0^c \cap D_2^c|)$$

$|D_0^c| = |D_2^c| = 9^6$ כיוון שזו ההסתברות שהספרה לא מופיעה כלל (סעיף ב')
$|D_0^c \cap D_2^c| = 8^6$ כיוון שכעת יש רק 8 ספרות להרכיב מתוכן קוד (ללא 2 וללא 0)
סה"כ :

$$|D_0 \cap D_2| = 10^6 - 9^6 - 9^6 + 8^6$$

6. 10 זוגות של בעלים ונשותיהם מתיישבים באקראי סביב שולחן עגול. חשבו את מס' האפשרויות בכל אחד מהמאורעות הבאים:

א. כל הזוגות יושבים יחד
ב. רק 9 זוגות יושבים יחד

(תזכורת: מס' הדרכים לסדר n עצמים במעגל הוא $(n-1)!$)

פתרון:

א. נסמן את המאורע המבוקש ב- A. אנו מעוניינים שכל הזוגות ישבו יחד לכן נתייחס לכל זוג כאל בלוק. סה"כ יש לנו 10 בלוקים לסדר במעגל ולכך יש $9!$ אפשרויות. כעת נותר לטפל בסידור הפנימי של כל זוג : לכל זוג יש 2 אפשרויות לכן לכל הזוגות יש 2^{10} סידורים פנימיים.
סה"כ : $|A| = 9!\,2^{10}$

ב. נסמן את המאורע ב-B. נבחר תחילה את הזוג שישב בנפרד, לכך יש 10 אפשרויות. כעת נסדר את כל 9 הזוגות שלא מופרדים במעגל, ונקח בחשבון סידורים פנימיים, לכך יש $8! \cdot 2^9$ אפשרויות. כעת צריך למקם את הזוג שיושב בנפרד בין הזוגות. נמקם תחילה את האשה בין הזוגות שכבר מיקמנו, לכך יש 9 אפשרויות ולגבר נותרו 8 אפשרויות לבחירת מקום.

סה"כ:

$$|B| = 10 \cdot 8! \cdot 2^9 \cdot 9 \cdot 8$$