פתרון תרגיל בית 1: מבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

1. בכיתה מסוימת הוגדרו:
A - קבוצת תלמידים הדוברים עברית
B – קבוצת תלמידים הדוברים אנגלית
C – קבוצת תלמידים הדוברים רוסית

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך ומשלים לתיאור הקבוצות הבאות:
א. דוברי כל שלוש השפות
ב. דוברי בדיוק שפה אחת מהנ"ל
ג. דוברי לפחות אחת השפות הנ"ל
ד. אינם דוברי עברית
ה. דוברי בדיוק שתי שפות
ו. דוברי לפחות שתי שפות

אילו מהקבוצות הנ"ל זרות?
פתרון:

א. $A \cap B \cap C$
ב. $(A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$
ג. $A \cup B \cup C$
ד. A^c
ה. $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$ או
$(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$ או
$\big((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)\big) \cap \big((A \cap B \cap C)^c\big)$
ו. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

קבוצות זרות : א,ב,ה זרות בזוגות, א,ד זרות, ב,ו זרות

2. עורכים סדרה של 10 הטלות מטבע. התוצאות האפשריות בכל הטלה הן "עץ" או "פלי". תארו מילולית את המשלים של כל אחד מן המאורעות הבאים:
א. לפחות 6 פעמים התקבל "עץ".
ב. לכל היותר 4 פעמים התקבל "עץ".
ג. לא התקבל אף "עץ".
ד. בשתי ההטלות הראשונות התקבל "עץ".
ה. מספר ה"עצים" גדול ממספר ה"פלים".
ו. התקבלו פחות מ - 8 "פלים".

פתרון :

א. לכל היותר 5 פעמים התקבל עץ.
ב. לפחות 5 פעמים התקבל עץ.
ג. התקבל לפחות עץ אחד.
ד. התקבל לפחות פלי אחד בשתי ההטלות הראשונות.
ה. מספר העצים הוא לכל היותר מספר הפלים.

ו. התקבלו לפחות 8 פלים.

3. הוכיחו את חוקי דה מורגן לשלושה מאורעות: (הדרכה: הכלה דו-כיוונית או דיאגרמת ון)

א. $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

ב. $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$

ג. הוכיחו את ההכללה ל- n מאורעות (היעזרו בהכלה דו-כיוונית)

i. $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$

ii. $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$

פתרון: (רק סעיף ג')

i. תחילה נראה: $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$: יהי $x \in (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c$, אז x לא נמצא בחיתוך, כלומר: $x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. ולכן x לא נמצא בלפחות אחת מבין $A_1, \dots, A_n$ (כי אם היה בכולן אז הוא היה בחיתוך). לכן כלומר קיימת לפחות קבוצה אחת שהוא נמצא במשלים של, או באופן שקול: $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$.
נראה את הכיוון השני: נראה כי $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$: יהי $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$, אז x נמצא בלפחות אחד מבין $A_1^c, \dots, A_n^c$, כלומר קיימת קבוצה ש-x לא נמצא בה אלא נמצא במשלים שלה ולכן x לא יכול להיות ב- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ (כיוון שמשמעות הדבר הוא ש x נמצא בכל הקבוצות) לכן $x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ובפרט $x \in (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c$

ii. תחילה נראה: $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$: יהי $x \in (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$. משמעות הדבר היא ש- x לא נמצא ב- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. ז"א ש- x לא נמצא באף אחת מבין $A_1, \dots, A_n$ או באופן שקול, x נמצא בכל אחת מבין $A_1^c, \dots, A_n^c$ כלומר $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$.
בכיוון השני: נראה כי $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$: יהי $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$. אז x נמצא בכל במשלימים של הקבוצות ולכן לא קיים באף קבוצה כלומר: $x \in (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$

4. עורכים ניסוי בכל יום , במשך 4 ימים. לניסוי שתי תוצאות אפשריות – הצלחה / כישלון.
נגדיר מאורעות: Ai – הצלחה ביום ה-i (i=1,2,3,4). מרחב המדגם מתאר את התוצאות בכל יום.

א. האם A1 ו- A2 מאורעות זרים?

ב. תארו באמצעות איחוד/חיתוך/משלים את המאורעות הבאים:

i. כל הניסויים נכשלו.

ii. הייתה הצלחה אחת לפחות.

iii. ההצלחה הראשונה קרתה בניסוי השלישי.

iv. ההצלחה הראשונה קרתה אחרי הניסוי השני. (<u>אם בכלל</u>)

v. הייתה הצלחה אחת בדיוק.

פתרון:

א. המאורעות A1 ו- A2 אינם זרים. למשל (ה,ה,ה,ה) שייך לשניהם. ("ה"="הצלחה")

ב. $\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap \overline{A3} \cap \overline{A4}$

ג. $A1 \cup A2 \cup A3 \cup A4$

ד. $\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap A3$

ה. $\overline{A1} \cap \overline{A2}$

ו. $(A1 \cap \overline{A2} \cap \overline{A3} \cap \overline{A4}) \cup (\overline{A1} \cap A2 \cap \overline{A3} \cap \overline{A4}) \cup (\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap A3 \cap \overline{A4}) \cup (\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap \overline{A3} \cap A4)$

5. הוכיחו או הביאו דוגמא נגדית:

א. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$.

ב. $A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus (A \cup B))$.

ג. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

ד. $(A \cup B) \setminus A \quad = \quad B$

פתרון:

א. דוגמא נגדית: $C = \{2\} \quad A = B = \{1\}$ ואז $A \cap B \cap (B \cup C) = \{1\} \quad A \cap B \cap C = \phi$.

ב. טענה זו נכונה (אפשר להוכיח גם בעזרת דיאגראמת ואן)

$$A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus (A \cup B)) = A \cup (B \cap \overline{A}) \cup (C \setminus (A \cup B)) =$$
$$((A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})) \cup (C \setminus (A \cup B)) = (A \cup B) \cup (C \cap (\overline{A \cup B})) =$$
$$(A \cup B \cup C) \cap ((A \cup B) \cup (\overline{A \cup B})) = A \cup B \cup C$$

ג. דוגמא נגדית $C = \{1,2,3\} \quad B = \{2\} \quad A = \{1\}$ ואז

$(C \setminus A) \cup (C \setminus B) = \{1,2,3\} \quad C \setminus (A \cup B) = \{3\}$.

ד. ניתן לראות בקלות ע"י דיאגרמת ון