

פתרון תרגיל בית 12:

1. כנד כדורים אדומים שחורים ולבנים (4 מכל צבע). מוציאים מהכד 4 כדורים עם החזרה. יהיו X, Y, Z מספר הכדורים האדומים, השחורים והלבנים שהוצאו, בהתאמה.
- כיצד מ"מ אלו מתפלגים?
 - כיצד מתפלג $X+Y$? מהי שונותו?
 - מה מקדם המתאם בין X ל- Y ?
 - מה מקדם המתאם בין $X+Y$ ל- Z ?
2. יהיו X, Y ניסויי ברנולי ב"ת עם סיכוי להצלחה 0.5 כ"א. נגדיר את המשתנים הבאים:
- $Z = X + Y$
 - $W = |X - Y|$
- האם Z, W בלתי מתואמים?
 - האם Z, W ב"ת?
3. מטילים קובייה 100 פעמים. X – מס' ההטלות שקיבלנו 2 או 3, Y – מס' ההטלות שקיבלנו 1 או 2. חשבו את $Cov(X, Y)$, $\rho(X, Y)$.
4. (שאלה ממבחן) מושכים כדורים אחד אחרי השני וללא החזרה מכד בו מאה כדורים בארבעה צבעים: 25 כדורים אדומים, 25 כדורים כחולים, 25 כדורים לבנים, ו-25 כדורים צהובים.
- מה הסיכוי שנוציא כדור אדום בטרם יהיו בחוץ שני כדורים כחולים?
 - בהינתן שאחרי הוצאת ארבעה כדורים יש בידינו שניים אדומים ושניים כחולים, מה הסיכוי לכך שאחרי שני כדורים היו בידינו אדום וכחול?
 - אחרי שמשכנו חמישים כדורים בזה אחר זה, מהי שונות מספר הרצפים של אדום ואח"כ כחול שקיבלנו?
 - אם ידוע שבעשרה כדורים הראשונים יצאו שלושה כחולים, כיצד מתפלג מספר האדומים בעשרה כדורים הראשונים?
5. מבצעים סדרה של n הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן. יהי X – מספר ההצלחות. חשבו באמצעות שימוש באי-שיוויון צ'בישב ה- n המינימלי כך ש- $P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{16}$.
6. מבצעים סדרה אין סופית של הטלות מטבע. על צד אחד של המטבע מופיע 0 ועל הצד השני מופיע 1. בכל הטלה המטבע נופל על 0 בסיכוי $\frac{2}{3}$ ועל 1 בסיכוי $\frac{1}{3}$ באופן בלתי תלוי בהטלות האחרות.
- עבור $1 \leq i < \infty$ יהי X_i אינדיקטור לקבלת התוצאה 1 בהטלה ה- i .
- עבור $1 \leq i < \infty$ יהי Z_i אינדיקטור לקבלת תוצאות שונות בהטלות ה- i וה- $i+1$.
- עבור $1 \leq n < \infty$ יהי $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$
- עבור $1 \leq n < \infty$ יהי $T_n = \sum_{i=1}^n Z_i$
- א. מצאו חסם עליון באמצעות א"ש צ'בישב ל- $P(|S_{90} - 30| > 10)$

ב. מצאו חסם עליון באמצעות א"ש מרקוב ל- $P(T_{90} \geq 60)$

7. בכד יש 1000 כדורים, 500 לבנים ו-500 שחורים. מוציאים מהכד 100 כדורים ללא החזרה. מצאו בעזרת אי שיוויון מרקוב ואי שיוויון צ'בישב חסם עליון לסיכוי שיצאו יותר מ-70 כדורים לבנים (למצוא שני חסמים).