❖ **סוגיה:**

למהמר יש שקל אחד. הוא רוצה להגיע ל-64 שקלים. בכל שלב, כל עוד הוא לא התרושש הוא מהמר על כל קופתו. בכל הימור יש לו סיכוי של p להכפיל את סכום ההימור וסיכוי של $q=1-p$ להפסיד את סכום ההימור.

א. מהי ההסתברות שהוא יגיע ל-64 ₪?

❖ פתרון:

א. p^6 הוא צריך לזכות 6 פעמים אחרת הוא יפסיד. נניח שהוא זכה פעמיים בהימור, מה כעת סיכוייו לנצח? הוא צריך עוד 4 פתרונות: p^4.

ב. נניח שהוא הפסיד. מה ההסתברות שהוא הפסיד כבר לאחר לכל היותר 3 משחקים?

A – הפסיד, כלומר לא זכה ב-64

B – הפסיד כבר לאחר 3 משחקים.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{1-p^6}=\frac{1-p^3}{1-p^6}$$

❖ **שאלה:**

יהי X – משתנה מקרי המתפלג $U(0,1)$. בונים ריבוע שאורך צלעו X.

א. מהי תוחלת שטח הריבוע?

השטח של רבוע שאורך צלעו X הוא X^2.

$$E(X^2)=\int_0^1 f_X(x)\cdot x^2dx=\int_0^1 1\cdot x^2dx=\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}-0$$

ב. מהי ההסתברות ששטח הריבוע קטן מ-$\frac{1}{2}$?

$$p\left(X^2<\frac{1}{2}\right)=P\left(X<\sqrt{0.5}\right)=\frac{\sqrt{0.5}-0}{1-0}=\sqrt{0.5}$$

ג. מהי תוחלת היקף הריבוע?

$$E(4X)=4E(X)=4\cdot\frac{0+1}{2}=2$$

ד. מהי ההסתברות שהערך המוחלט של השטח היא בין $\frac{1}{4}$ ל-$\frac{1}{3}$?

$$P\left(\frac{1}{4}\le|S|\le\frac{1}{3}\right)=P\left(-\frac{1}{4}\le S\le-\frac{1}{3}\right)+P\left(\frac{1}{4}\le S\le\frac{1}{3}\right)=$$

$$0+P\left(\frac{1}{4}\le X^2\le\frac{1}{3}\right)=P\left(X^2\le\frac{1}{3}\right)-P\left(X^2\le\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}-0}{1-0}-\frac{\sqrt{\frac{1}{4}}-0}{1-0}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}$$

❖ **סוגיה:**

בכיתה 30 ילדים. כל ילד משחק נגד כל ילד אחר פעם אחת. בכל משחק יש בדיוק מנצח אחד. מהי תוחלת מספר הניצחונות הכולל של ילדי הכיתה.

❖ פתרון:

$\binom{30}{2}$. כי יש $\binom{30}{2}$ משחקים ובכל משחק יש בדיוק מנצח אחד.

עכשיו נשנה את תנאי השאלה: נניח שכל משחק מסתיים בתיקו בסיכוי $\frac{1}{3}$. מהי תוחלת מספר משחקי התיקו?

יש $\binom{30}{2}$ אינדיקטורים שכל אחד מהם הוא הצלחה בסיכוי של $\frac{1}{3}$. תוחלת הסכום היא $\binom{30}{2}\cdot\frac{1}{3}$. אי אפשר להגיד שמספר תוצאות התיקו מתפלג בינומית כי לא ידוע שיש אי תלות בין תוצאות המשחקים.

❖ **שאלה:**

בחפיסת קלפים יש 52 קלפים שמתוכם 4 הם אסים. מערבבים את הקלפים. מתקבל סדר אקראי. מה ההסתברות שהאס השני מופיע מיד לאחר האס הראשון?

❖ פתרון:

דרך א':

$|\Omega| = 52!$.

$$|A| = \Sigma_{i=1}^{49}\binom{48}{i-1}(i-1)!\cdot 4\cdot 3\cdot\big(52-(i+1)\big)!$$

דרך ב':

$|\Omega| = 52!$.

נבחר את האס שהולך להיות שני. נסדר את יתר הקלפים ואז נשים את האס הזה, שנבחר בהתחלה, מיד לאחר הראשון, כי אין אפשרות אחרת. נקבל: $|A| = 4\cdot 51!$

$$P = \frac{4\cdot 51!}{52!} = \frac{1}{13}$$

דרך ג':

$|\Omega| = \binom{52}{4}$ – בחירת המיקומים של ארבעת האסים.

$|A| = \binom{51}{3}$. מקום אחד הוא כפול. זהו מקום שבא מכניסים את שני האסים הראשונים. אז צריך לבחור 3 מקומות מתוך 51 לארבעת האסים.

$$P = \frac{\binom{51}{3}}{\binom{52}{4}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

ניסיון למצוא חסמים $Cov(X,Y)$?

יהיו X,Y שני משתנים בעלי שונויות $V(X),V(Y)$.

נסתכל על $V(X-Y)$:

$$0 \le V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X,Y)$$

$$0 \le V(X) + V(Y) - 2Cov(X,Y)$$

ולכן:

$$Cov(X,Y) \le \frac{V(X)+V(Y)}{2}$$

נסתכל על: $V(X+Y)$:

$$0 \le V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$$

לכן:

$$Cov(X,Y) \ge -\frac{V(X)+V(Y)}{2}$$

כעת נסתכל על $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים שווי התפלגות ושווי התפלגות משותפת.

האם יתכן $Cov(X_i,X_j) = V(X_i)$ לכל i,j? כן! יתכן שכל המשתנים הם העתק אחד של השני, הם כולם שווים.

$$Cov(X_i,X_j) = Cov(X_i,X_i) = V(X_i)$$

לכן ייתכן שכל ה-Cov הם חיוביים.

- **שאלה:**

  האם בנתונים אלה, יתכן שקיימים i,j כך ש-$Cov(X_i,X_j) < 0$?

  - פתרון:

    התשובה היא לא. במקרה שהם שווי התפלגות ושווי התפלגות משותפת.

    $$V(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n} X_i + 2\Sigma_{i<j} Cov(X_i,X_j)$$

    נניח ש-$V(X_1) = \sigma^2$ אז לכל i מתקיים $V(X_i) = \sigma^2$.

    הם גם שווי התפלגות משותפת ולכן: $Cov(X_i,X_j) = Cov(X_1,X_2)$ לכל i,j. קיבלנו ש:

    $$V(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = n \cdot \sigma^2 + 2\binom{n}{2} \cdot Cov(X_1,X_2)$$

    ידוע ש: $V(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) \ge 0$. ולכן:

    $$n \cdot \sigma^2 + 2\binom{n}{2} \cdot Cov(X_1,X_2) \ge 0$$

    מתקיים:

    $$Cov(X_1,X_2) \ge -\frac{n \cdot \sigma^2}{2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}} = -\frac{\sigma^2}{n-1}$$

    השיקול הזה תקף לכל n סופי. לכן $Cov(X_1,X_2)$ גדול או שווה מכל מספר שלילי.

❖ **שאלה:**

יהי $X\sim P(1)$. מצאו $E(|X-1|)$.

➢ פתרון:

$$E(|X-1|)=\Sigma_{k=0}^{\infty}P(X=k)\cdot|k-1|=P(X=0)\cdot|-1|+\Sigma_{k=1}^{\infty}P(X=k)\cdot|k-1|=$$

$$e^{-1}\cdot 1+[\Sigma_{k=1}^{\infty}P(X=k)\cdot k]+[\Sigma_{k=1}^{\infty}P(X=k)\cdot(-1)]=$$

$$e^{-1}+E(X)-P(X\geq 1)=$$

$$e^{-1}+1-[1-P(X=0)]=$$

$$e^{-1}+e^{-1}=\frac{2}{e}$$

❖ **שאלה:**

אני מטיל 3 פעמים קובייה תקינה, ההטלות הן ב״ת. מהי ההסתברות שהמכפלה הוא כפולה של 5?

➢ פתרון:

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$. זהו המשלים של 3 פעמים תוצאה שאינה 5.

❖ **שאלה:**

שיכור מבצע הילוך מקרי על ישר. הוא מתחיל בראשית ובכל שלב הוא עושה צעד ימינה בסיכוי חצי וצעד שמאלה בסיכוי חצי באופן בלתי תלוי בשלבים האחרים. מה הסיכוי שעד שלב 9 הוא יגיע לפחות פעם אחת לנקודה 5.

➢ פתרון:

הוא יכול להיות ב-5 בשלבים 5,7,9.

A_5 – יהיה בנקודה 5 לאחר 5 שלבים

A_7 – יהיה בנקודה 7 לאחר 7 שלבים

A_9 – יהיה בנקודה 9 לאחר 9 שלבים.

מבוקש $P(A_5\cup A_7\cup A_9)$.

$$P(A_5\cup A_7\cup A_9)=$$

$$P(A_5)+P(A_7)+P(A_9)-P(A_5\cap A_7)-P(A_5\cap A_9)-P(A_7\cap A_9)$$
$$+P(A_5\cap A_7\cap A_9)$$

$$P(A_5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$P(A_7)=\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{2}$$

$$P(A_9)=\binom{9}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(A_5 \cap A_7) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(A_5 \cap A_9) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(A_7 \cap A_9) = \binom{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P(A_5 \cap A_7 \cap A_9) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

❖ **סוגיה:**

$X \sim G(p), Y \sim G(p)$, המשתנים הם ב״ת. $W = \min\{X, Y\}$. מהי תוחלת מספר משתנים מבין X, Y, W שקטנים מ-3?

➢ פתרון:

נענה על השאלה מבלי לחשב את התפלגות מספר המשנים האלה.

X_1 – אינדיקטור לכך ש-$X < 3$

Y_1 – אינדיקטור לכך ש-$Y < 3$

W_1 – אינדיקטור לכך ש-$W < 3$

$X_1 + Y_1 + W_1$ זהו מספר המשתנים שקטנים מ-3. מבוקש: $E(X_1 + Y_1 + W_1)$.

$$E(X_1 + Y_1 + W_1) = E(X_1) + E(Y_1) + E(W_1)$$

$$E(X_1) = P(X < 3) = 1 - p^2$$

$$E(Y_1) = E(X_1) = 1 - p^2$$

$$E(W_1) = P(W < 3) = 1 - P(X \geq 3, Y \geq 3) = 1 - P(X \geq 3)P(Y \geq 3) = 1 - p^2 \cdot p^2$$

לכן נקבל: $E(X_1 + Y_1 + W_1) = 3 - 2p^2 - p^4$.

❖ **סוגיה:**

מבצעים סדרה של הטלות ב״ת של מטבע שנופל על עץ בסיכוי $\frac{1}{3}$ ועל פלי בסיכוי $\frac{2}{3}$.

יהי W – הפעם שבה זכינו לראשונה לראות את שתי התוצאות.

X – מספר ההטלות עד קבלת עץ

Y – מספר ההטלות עד קבלת פלי.

חשבו $E(W)$.

➢ פתרון:

דרך א׳:

מבצעים הטלה אחת ולאחריה בסיכוי $\frac{1}{3}$ יש משתנה $G\left(\frac{2}{3}\right)$ ובסיכוי $\frac{2}{3}$ משתנה $G\left(\frac{1}{3}\right)$.

לכן: $E(W) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}}$.

דרך ב׳:

יהי $Z = \min\{X, Y\}$.

$$\min\{X, Y\} + \max\{X, Y\} = X + Y$$

$$Z + W = X + Y$$

$$E(Z + W) = E(X + Y)$$

$$E(Z) + E(W) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3, \qquad E(Y) = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

המינימום בין $\{X, Y\}$ חייב לקבל את הערך 1. כלומר, Z משתנה מנוון ולכן מתקיים: $E(Z) = 1$.

לכן:

$$E(W) = 3 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{7}{2}$$

שאלה: מהו $P(W > 5)$?

תשובה: או חמישה עצים רצופים או חמישה פלי רצופים. זה: $\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5$.

עכשיו נניח שעל המטבע יש בסיכויים שווים עץ ופלי, כלומר מטבע הוגן. מהו $V(W)$?

תשובה: מבצעים הטלה ואחריה יש סדרת הטלות שמתפלגת $G\left(\frac{1}{2}\right)$ עד קבלת התוצאה הנוספת.

יהי T – מספר ההטלות לאחר ההטלה הראשונה. לכן: $W = T + 1$.

$$V(W) = V(T + 1) = V(T) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$