תוחלת סכום שווה לסכום התוחלות

הוכחה:

נוכיח כי: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$$E(X+Y)=\Sigma_{\varepsilon}P(\varepsilon)\cdot(X+Y)(\varepsilon)=\Sigma_{\varepsilon}(P(\varepsilon)\cdot(X(\varepsilon)+Y(\varepsilon)))=$$

$$\Sigma_{\varepsilon}\left(P(\varepsilon)\cdot X(\varepsilon)+P(\varepsilon)Y(\varepsilon)\right)=$$

$$\Sigma_{\varepsilon}P(\varepsilon)X(\varepsilon)+\Sigma_{\varepsilon}P(\varepsilon)Y(\varepsilon)=$$

$$E(X)+E(Y)$$

באופן דומה $\boldsymbol{E(\Sigma X_i)=\Sigma E(X_i)}$ ובזה נשתמש הרבה.

שימושים ופתרון בעיות:

- **דוגמא:**

אני מבצע n הטלות של מטבע הוגן. מהי תוחלת מספר הפאות שאראה?

- פתרון ראשון: ללא שימוש בתוחלת סכום אלא רק בהתפלגות

X – מספר הפאות שנראה

$$P(X=1)=0.5^n+0.5^n=0.5^{n-1}$$

$$P(X=2)=1-P(X=1)=1-0.5^{n-1}$$

$$E(X)=P(X=1)\cdot 1+P(X=2)\cdot 2=0.5^{n-1}\cdot 1+(1-0.5^{n-1})\cdot 2=$$

$$0.5^{n-1}+2-1^{n-1}=2-0.5^{n-1}$$

פתרון נוסף בעזרת תוחלת וסכום:

X_1 – אינדיקטור לכך שנראה את התוצאה 1 "עץ"

X_2 – אינדיקטור לכך שנראה את התוצאה 2 "פלי"

X – מספר התוצאות שנראה:

$$X=X_1+X_2$$

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)$$

$$E(X_1)=P(X_1=0)\cdot 0+P(X_1=1)\cdot 1=(1-0.5^n)\cdot 1$$

$$E(X_1)=E(X_2)$$

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)=2[1-0.5^n]=2-0.5^{n-1}$$

- **שאלה**

אני מבצע 20 הטלות בלתי תלויות של קובייה תקינה. מהי התוחלת של מספר הפאות שאזכה לראות?

X – מספר הפאות שאזכה לראות

- פתרון:

X_i – אינדיקטור לכך שראיתי את התוצאה i.

$$P(X_i = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{20}, P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{20}$$

$$E(X) = E(\Sigma X_i) = \Sigma E(X_i) = 6\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{20}\right]$$

- **בעיית המזכירה הרשלנית**

מזכירה צריכה לשלוח n מכתבים ל-n אנשים שונים. לכל אחד מהם מגיע מכתב אחד מסוים. היא התבלבלה והיא שולחת להם את המכתבים באקראי מהי תוחלת מספר המכתבים שיגיעו ליעדם?

X – מספר המכתבים שיגיעו ליעדם.

- פתרון:

X_i – אינדיקטור לכך שמכתב i יגיע ליעדו.

$$X = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$$

לכן:

$$E(X) = E(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$E(X_i) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$E(X_i) = P(X_i = 1)$$

$$E(X) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

ווריאציה נוספת של השאלה הזו

יש 11 אנשים. לי מגיעים שני מכתבים ויש שתי מעטפות שעליהן כתוב שמי. מעשרת האנשים האחרים, מיועד לו מכתב אחד מסוים.

X_i – אינדיקטור לכך שמכתב i יגיע ליעדו

X_1, X_2 – אינדיקטורים לכך שהמכתבים שמיועדים לי יגיעו אלי

$X_3, \dots X_{12}$ – אינדיקטורים לכך שהמכתבים האחרים יגיעו ליעדם

מתקיים:

$$E(X_3) = E(X_4) = \cdots = E(X_{11}) = \frac{1}{12}$$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{2}{12}$$

$$E(X) = \Sigma E(X_i) = 2 \cdot \frac{2}{12} + 10 \cdot \frac{1}{12}$$

תוחלת של פונקציה לינארית של משתנה: לינאריות התוחלת

יהיו a,b קבועים, אז מתקיים $E(ax+b)=a\cdot E(X)+b$

- **שאלה**

מטילים 100 מטבעות בלתי תלויים בעלי סיכוי $\frac{1}{3}$ להצלחה בכל אחד.

X – מספר ההצלחות

אני מקבל 5 ₪ כל הצלחה ואני משלם 20 ₪ עבור השתתפותי במשחק.

Y – הרווח שלי.

מהו $E(Y)$?

- פתרון:

$X\sim Bin\left(100,\frac{1}{3}\right)$

$$Y=5X-20$$

$$E(Y)=E(5X-20)=5E(X)-20=5\left[100\cdot\frac{1}{3}\right]-20$$

- **סוגיה**

במבחן אמריקאי יש 20 שאלות. אדם שמנחש הכל פותר כל שאלה בסיכוי $\frac{1}{4}$ וטועה בסיכוי $\frac{3}{4}$. על כל תשובה נכונה מקבלים 5 נקודות. על כל שגיאה יורדות 3 נקודות.

X – הציון של האדם

מהו $E(X)$?

- פתרון:

דרך 1: בעזרת לינאריות התוחלת

Y – מספר התשובות הנכונות.

$Y\sim Bin\left(20,\frac{1}{4}\right)$

$$\mathrm{X}=5Y-3(20-Y=8Y-60$$

$$E(X)=E(8Y-60)=8E(Y)-60=8\left[20\cdot\frac{1}{4}\right]-60=-20$$

דרך 2: בעזרת – תוחלת סכום = סכום התוחלות

X_i – הציון של האדם בשאלה i, $1\le i\le 20$

$$E(X_i)=5\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{3}{4}=-1$$

$$E(X)=E(\Sigma_{i=1}^{20}X_i)=\Sigma_{i=1}^{20}E(X_i)=20\cdot(-1)=-20$$

- **סוגיה – מפעל הפיס (מודל של שלומי)**

במשחק משתתפים 70 אנשים. כל משתתף משלם שקל אחד עבור השתתפותו. כל משתתף בוחר מספר אחד טבעי בין 1 ל-70. החברה המארגנת מגרילה מספר בין 1 ל-70. כל מי שבחר במספר זה זוכה בקופה – כל מה שהמשתתפים שילמו. אם יש יותר מזוכה אחד אז הם מתחלקים בקופה. אם אף אחד לא בחר במספר הנכון אז הכל נראה בידי החברה המארגנת.

אם כולם בוחרים במספר באופן בלתי תלוי אז החברה זוכה בסיכוי $\left(1-\frac{1}{70}\right)^{70}$.

זה בערך $\frac{1}{e}$. אז תוחלת הרווח היא $\frac{70}{e} \approx 70 \cdot \left(1-\frac{1}{70}\right)$.

תוחלת הרווח היא: $\left(1-\frac{1}{70}\right)^{70}\cdot 70+\left[1-\left(1-\frac{1}{70}\right)^{70}\right]\cdot 0=\left(1-\frac{1}{70}\right)^{70}\cdot 70$

אם אנחנו נתאם בינינו שכל אחד יבחר מספר שונה אז החברה לא תרוויח.

יש בסוגיה זו פוטנציאל עבור מפעל הגרלות. אפר ליצור קצת יותר חזרות על צירופים בין משתתפים שונים ובכך להגדיל את הסיכוי שלא יהיו זוכים ולהגדיל את הרווח של החברה.

תוחלת של משתנה גיאומטרי $X \sim G(p)$

בעקרון מתקיים: $E(X)=\Sigma_{k=1}^{\infty}P(X=k)\cdot k=\Sigma_{k=1}^{\infty}p\cdot q^{k-1}\cdot k$

נחשב בדרך אחרת:

$$E(X)=P(X=1)\cdot 1+P(X>1)\cdot E(1+X)$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})=p\cdot 1+q\cdot E(1+X)=p+q\big(1+E(X)\big)=p+q+q\cdot E(X)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$$

כעת נפתור את המשוואה:

$$E(X)=p+q+q\cdot E(X)$$

$$E(X)=1+q\cdot E(X)$$

$$E(X)[1-q]=1$$

$$E(X)\cdot p=1$$

$$E(X)=\frac{1}{p}$$

תוחלת של משתנה פואסוני $X \sim Pois(\lambda)$

$$E(X)=\Sigma_{k=0}^{\infty}P(X=k)\cdot k=$$

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}P(X=k)\cdot k=$$

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot k =$$

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$\lambda \Sigma_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$\lambda \Sigma_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} =$$

$$E(X) = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

הצבנו $i = (k-1)$. ב-Σ כתוב סכום הסתברויות של משתנה $Pois(\lambda)$ ולכן ה-$\Sigma = 1$.

תוחלת של משתנה סימטרי

הגדרה: משתנה X הוא **סימטרי סביב ערך a** אם $P(X = a - t) = P(X = a + t)$ עבור כל t.

למשל אם: $P(X = 30) = P(X = 150) = 0.1$ ו-$P(X = 80) = P(X = 100) = 0.4$ אז המשתנה X סימטרי סביב 90 כי $P(X = 90 - 60) = P(X = 90 + 60)$.

טענה: אם X סימטרי סביב a אז $E(X) = a$.

- **דוגמא**

$X \sim U[1,6]$: משתנה קובייה תקינה. משתנה זה מתפלג סימטרי סביב $a = 3.5$.

$P(X = 3.5 - 2.5) = P(X = 3.5 + 2.5)$

$P(X = 3.5 - 1.5) = P(X = 3.5 + 1.5)$

$P(X = 3.5 - 0.5) = P(X = 3.5 + 0.5)$

מכיוון שהוא מתפלג סימטרי סביב 3.5 אז $E(X) = 3.5$.

הוכחת הטענה:

נתחיל במקרה ש-X סימטרי סביב 0.

$$E(X) = \Sigma_k p(X = k) \cdot k =$$

$$\Sigma_{k<0} P(X = k) + \Sigma_{k>0} P(X = k) =$$

$$\Sigma_{k<0} P(X = k) \cdot (-k) + \Sigma_{k>0} P(X = k) \cdot k =$$

$$(-1)\Sigma_{k>0} P(X = k) \cdot k + \Sigma_{k>0} P(X = k) \cdot k = 0$$

עכשיו נוכיח עבור משתנה X שסימטרי סביב a כללי:

נגדיר משתנה $Y = x - a$. המשתנה Y סימטרי סביב 0. לכן לפי הטענה הקודמת $E(Y) = 0$.

אבל $Y = x - a$ או $X = Y + a$ אז

$$E(X) = E(Y + a) = 0 + a = a$$

השתמשנו בלינאריות התוחלת.

תוחלת של פונקציה של משתנה

יהי X משתנה מקרי.

יהי $g(x)$ – פונקציה של X

$$E\big(g(x)\big) = \Sigma_k P(X = k) \cdot g(k)$$

- **דוגמא:**

יהי $P(X = 2) = P(X = -2) = \frac{1}{2}$

יהי $g(x) = x^4$

$$E\big(g(x)\big) = P(X = 2) \cdot 2^4 + P(X = -2) \cdot (-2)^4 = 0.5 \cdot 16 + 0.5 \cdot 16 = 16$$

***הערה**: נשים לב ש-$E\big(g(x)\big) \neq g\big(E(X)\big)$ $\quad \Leftarrow \quad g\big(E(X)\big) = g(0) = 0^4 = 0$

$E(X) = 0$ כי X סימטרי סביב 0.

תוחלת מותנה

הגדרה: תוחלת מותנה היא תוחלת בהינתן איזשהו מאורע או איזשהו ערך או קבוצת ערכים של משתנה אחר.

- **דוגמא:**

X, Y זוג הטלות בלתי תלויות של קובייה תקינה.

$Z = X + Y$.

מתקיים: $E(X) = 3.5$. מהו $E(X|Z = 4)$?

$$E(X|Z = 4) = P(X = 1|Z = 4) \cdot 1 + P(X = 2|Z = 4) \cdot 2 + P(X = 3|Z = 4) \cdot 3 =$$

$$\frac{P(X = 1, Z = 4)}{P(Z = 4)} \cdot 1 + \frac{P(X = 2, Z = 4)}{P(Z = 4)} \cdot 2 + \frac{P(X = 3, Z = 4)}{P(Z = 4)} \cdot 3 =$$

$$\frac{P(X = 1, Y = 3)}{P(Z = 4)} \cdot 1 + \frac{P(X = 2, Y = 2)}{P(Z = 4)} \cdot 2 + \frac{P(X = 3, Y = 1)}{P(Z = 4)} \cdot 3$$

ההתפלגות המותנה של X בהינתן $Z=4$ היא $U[1,3]$ כי כל האחד מהצירופים הנ"ל הוא בסיכוי שווה של $\frac{1}{36}$, ולכן התוחלת המותנה היא 2.

תוחלת שלמה

נניח שמתרחשים בדיוק 1 מבין המאורעות $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ אז: $E(X)=\Sigma P(A_i)\cdot E(X|A_i)$.

- **דוגמא**:

נניח שאני נוסע לחיפה בסיכוי 0.2, לת"א בסיכוי 0.5 ולירושלים בסיכוי 0.3. בחיפה אני פוגש בממוצע 3 אנשים, בת"א 2 ובירושלים 5.

X – מספר האנשים שאפגוש

$$E(X)=P(\text{חיפה})\cdot 3+P(\text{תא})\cdot 2+P(\text{ירושלים})\cdot 5$$

- **דוגמא נוספת:**

100 אנשים ניגשים לבחינה. כל אחד מהם עובר את הבחינה בסיכוי 0.8. כל אחד מהעוברים ניגש לבחינה נוספת שאותה הוא עובר בסיכוי 0.7.

X – מספר העוברים את הראשונה

Y – מספר העוברים את השנייה

$$E(Y|X=x)=0.7\cdot X$$

$$E(Y)=E\big(E(Y|X)\big)=E(0.7X)=0.7\cdot E(X)=0.7(100\cdot 0.8)$$