שיעור 7 | משתנה פואסון ותוחלת | 3/12/17

- **סוגיה:**

$X\sim Bin(n,p), Y\sim Bin(m,p)$, שני המשתנים בלתי תלויים.

א. מהי ההתפלגות $Z=X+Y$?

ב. מהי ההתפלגות של X בהינתן $Z=z$?

- פתרון:

א. $0\le Z\le (m+n)$. נעזר באי תלות:

$$P(Z=z)=\Sigma_{x=0}^{z}P(X=x,Y=z-x)=P(X=x)\cdot P(Y=z-x)=$$

$$\Sigma_{x=0}^{z}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\binom{m}{z-x}p^{z-x}(1-p)^{m-(z-x)}=$$

$$\Sigma_{x=0}^{z}p^z(1-p)^{n+m-z}\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}=$$

$$p^z(1-p)^{n+m-z}\Sigma_{x=0}^{z}\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}=$$

$$\binom{n+m}{z}p^z(1-p)^{n+m-z}$$

וקיבלנו כי ההתפלגות היא $Bin(n+m,p)$.

ב. מהו $P(X=x|Z=z)$?

$$P(X=x|Z=z)=\frac{P(X=x,Z=z)}{P(z=z)}=$$

$$\frac{P(X=x)\cdot P(Y=z-x)}{\binom{n+m}{z}p^z(1-p)^{n+m-z}}=$$

$$\frac{\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\binom{m}{z-x}p^{z-x}(1-p)^{m-(z-x)}}{\binom{n+m}{z}p^z(1-p)^{n+m-z}}=$$

$$\frac{\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}}{\binom{n+m}{z}}$$

קיבלנו התפלגות היפר גיאומטרית: HG.

ידוע שבסך הכל קיבלנו 2 הצלחות. ההצלחות לקוחות מהצלחות שלי מניסויים שלו ומהצלחות שלך מהניסיונות שלך. סופרים את מספר אלה שהם שלי. אם ניסיון מסוים שלי תורם להצלחות אז הוא לא יכול להיבחר שוב.

התפלגות פואסונית: $\boldsymbol{X\sim Pois(\lambda)}$

משתנה פואסוני יש לו פרמטר יחיד $\lambda>0$. עבור משתנה $P(\lambda)$ מתקיים: $P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$.

למעשה $e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\ge 0$ לכל k. וגם: $\Sigma_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=1$ ולכן זאת התפלגות תקינה.

❖ **שאלה**:

$X\sim Pois(2)$, מהו $P(X \geq 3)$?

➢ פתרון:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = P(X = 2) =$$

$$1 - e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} - e^{-2} \cdot \frac{2^1}{1!} - e^{-2} \cdot \frac{2^2}{2!} =$$

$$1 - e^{-2} - 2e^{-2} - 2e^{-2}$$

<u>טענה</u>: אם $X\sim Pois(\lambda)$ ו-$Y\sim Pois(\mu)$ ו-X,Y ב"ת, אז $Z = X + Y$ ומתקיים: $Z\sim Pois(\lambda + \mu)$.

הוכחה:

$$P(Z = z) = \Sigma_{x=0}^{z} P(X = x, Y = z - x) = \Sigma_{x=0}^{z} P(X = x) \cdot P(Y = z - x) =$$

$$\Sigma_{x=0}^{z} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{z-x}}{(z - x)!} =$$

$$\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \cdot \Sigma_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!\,(x - z)!} \lambda^x \mu^{z-x} =$$

$$\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \cdot \Sigma_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \lambda^x \mu^{z-x} =$$

$$e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda + \mu)^z}{z!}$$

קיבלנו ש: $X + Y\sim p(\lambda + \mu)$.

תהליך שסופר את מספר האירועים לאורך זמן כשיש אי תלות בין פרקי זמן זרים מתאים להיות על ידי התפלגות פואסונית.

<u>טענה</u>: אם $X\sim Pois(\lambda)$ ובהינתן X - $Y\sim Bin(x,p)$ אזי $Y\sim Pois\ (\lambda p)$.

$$P(Y = y) = \Sigma_{x=y}^{\infty} P(X = x) \cdot P(Y = y|X = x) =$$

$$\Sigma_{x=y}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \binom{x}{y} p^y (1 - p)^{x-y} =$$

$$\Sigma_{x=y}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \frac{x!}{y!\,(x - y)!} \cdot p^y (1 - p)^{x-y} =$$

$$\Sigma_{x=y}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{y!\,(x - y)!} \cdot p^y (1 - p)^{x-y} =$$

$Y \sim Pois(\lambda p) \Longrightarrow e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^y}{y!}$

$$\Sigma_{x=y}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y \cdot p^y}{y!} \cdot \frac{\lambda^{x-y}(1-p)^{x-y}}{(x-y)!} =$$

$$\frac{(\lambda p)^y}{y!} \Sigma_{x=y}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\left(\lambda(1-p)\right)^{x-y}}{(x-y)!} =$$

$$\frac{(\lambda p)^y \cdot e^{-\lambda}}{y! \cdot e^{-\lambda(1-p)}} \Sigma_{x=y}^{\infty} e^{-\lambda(1-p)} \cdot \frac{\left(\lambda(1-p)\right)^{x-y}}{(x-y)!} =$$

$$\frac{(\lambda p)^y \cdot e^{-\lambda}}{y! \cdot e^{-\lambda(1-p)}} \Sigma_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda(1-p)} \cdot \frac{\left(\lambda(1-p)\right)^{t}}{(t)!} =$$

כאשר: $t = x - y$.

בתוך ה-Σ קיבלנו סכום הסתברויות של משתנה פואסוני: $Pois\left(\lambda(1-p)\right)$.

$$\frac{(\lambda p)^y \cdot e^{-\lambda}}{y! \cdot e^{-\lambda(1-p)}} \cdot 1 = e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^y}{y!}$$

- **שאלה**:

לבנק מגיעים בשעה זרם של אנשים המתפלג $Pois(2)$. נניח שיש אי תלות בין מספרי המגיעים בפרקי זמן זרים. כל מי שמגיע פונה לכספר בסיכוי $\frac{1}{4}$. איך מתפלג מספר המגיעים לכספר ב-8 שעות?

➢ פתרון:

בגלל תכונת החיבוריות, מספר המגיעים ב-8 שעות מתפלג $Pois(2 \cdot 8 = 16)$. כל אחד מהם פונה לכספר בסיכוי $\frac{1}{4}$ ולכן לפי תכונת משתנה פואסוני מפוצל, מספר המגיעים לכספר מתפלג $Pois\left(16 \cdot \frac{1}{4}\right)$ שזה $Pois(4)$.

עכשיו נוכל להגיע שההסתברות לכך שלכספר לא יגיע אף אחד היא: e^{-4} שזה הסיכוי שמשתנה $Pois(4)$ יקבל את הערך 0.

- **סוגיה:**

$X \sim Bin\left(n, \frac{1}{n}\right)$ כאשר n הוא מספר גדול. מהו $P(X=0)$?

➢ פתרון:

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cong e^{-1}$$

כי מתקיים: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$

באופן דומה המשתנה $X \sim Bin\left(n,\frac{1}{n}\right)$ מתנהג עבור ערכים קטנים דומה למשתנה $Pois(1)$.

תוחלת

יש ממוצע של נתונים שהתקבלו – זה ממוצע רגיל.
תוחלת היא ממוצע על פני התפלגות מסוימת.

הגדרה: עבור משתנה X נגדיר את התוחלת שלו כ-$E(X) = \Sigma_k P(X=k)\cdot k$.

- **דוגמא:**

נניח ש-$P(X=2)=0.1, P(X=5)=0.4, P(X=7)=0.5$

אזי התוחלת היא:

$$E(X) = P(X=2)\cdot 2 + P(X=5)\cdot 5 + P(X=7)\cdot 7 =$$
$$0.1\cdot 2 + 0.4\cdot 5 + 0.5\cdot 7$$

- **דוגמא**

תוחלת של משתנה מנוון:

$$P(X=a)=1$$

ולכן מתקיים:

$$E(X) = P(X=a)\cdot a = 1\cdot a = a$$

- **דוגמא**

מה התוחלת של משתנה אינדיקטורי בעל הסתברות p שהוא גם מתואר כ-$X\sim Ber(p)$?

אזי התוחלת היא:

$$E(X) = P(X=0)\cdot 0 + P(X=1)\cdot 1 = (1-p)\cdot 0 + p\cdot 1 = p$$

- **דוגמא**

תוחלת של משתנה קובייה: $X\sim U[1,6]$

אזי התוחלת היא:

$$E(X) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{(1+6)\cdot 6}{2} = 3.5$$

הכללה: מהי התוחלת של משתנה $X\sim U[a,b]$?

$$E(X) = \Sigma_{k=a}^{b} P(X=k)\cdot k =$$

$$\Sigma_{k=a}^{b}\frac{1}{b-a+1}\cdot k = \frac{1}{b-a+1}\Sigma_{k=a}^{b} k = \frac{1}{\cancel{(b-a+1)}}\cdot\frac{(a+b)\cancel{(b-a+1)}}{2} = \frac{a+b}{2}$$

מהי בעקרון התוחלת של $X \sim Bin(n,p)$?

על פי הגדרת התוחלת: $\Sigma_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot k = \Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\cdot k = \cdots$

משפט חשוב: תוחלת סכום שווה לסכום התוחלות. כלומר: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ או $E(\Sigma X_i)=\Sigma E(X_i)$.

- **דוגמא:**

$P(X=3)=0.5, P(X=1)=0.5$

$P(Y=4)=\frac{1}{4}, P(Y=0)=\frac{3}{4}$

מהו לפי המשפט $E(X+Y)$?

- פתרון:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=(0.5\cdot 1+0.5\cdot 3)+\left(\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{3}{4}\cdot 0\right)=2+1=3$$

שימו לב שלא חישבתי את התפלגות הסכום ואני גם לא יכול לחשב אותה כי למשל, אני לא יודע אם יש אי תלות. אבל המשפט תקף בכל זאת.

חישוב תוחלת של משתנה $X \sim Bin(n,p)$

$X=\Sigma_{i=1}^{n}X_i$ כאשר X_i הם אינדיקטורים בעלי סיכוי p. מתקיים:

$$\forall i: E(X_i)=(1-p)\cdot 0+p\cdot 1=p$$

$$E(X)=E(\Sigma_{i=1}^{n}X_i)=\Sigma_{i=1}^{n}E(X_i)=np$$

חישוב תוחלת של משתנה $X \sim HG(n;a,b)$

יש כאן n אינדיקטורים שכל אחד מהם הוא הצלחה בסיכוי $\frac{a}{a+b}$. לכן תוחלת הסכום היא: $n\cdot\frac{a}{a+b}$. כל אינדיקטור יש לו הסתברות $\frac{a}{a+b}$.

נראה שבמשיכת כדורים ללא החזרה מתוך a כדורים לבנים ו-b כדורים שחורים, יש גם לכדור השני סיכוי של $\frac{a}{a+b}$ להיות לבן.

$$P(\text{כדור שני לבן})=P(\text{ראשון לבן})\cdot\frac{a-1}{a+b}+P(\text{ראשון שחור})\cdot\frac{a}{a+b-1}=$$

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=$$

$$\frac{(a(a-1)+b)}{(a+b)(a+b-1)}$$