שיעור 6 | משתנים מקריים | 26/11/17

משתנה מקרי גיאומטרי: $\boldsymbol{X \sim G(P)}$

מדובר בסדרת ניסיונות בלתי תלויים בעלי הסתברות p כל אחד וסופרים את הזמן עד קבלת הצלחה ראשונה.

טווח הערכים של X הוא כל ערך טבעי שלם וחיובי.

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$$

תכונת חוסר הזיכרון: נראה את תכונות חוסר הזיכרון למשתנה גיאומטרי עם $G(p)$. נראה שעבור כל a טבעי מתקיים: $P(X=x+a|X\geq a)=P(X=x)$.

$$P(X=x+a|X\geq a)=\frac{P(X=x+a,X>a)}{P(X>a)}=\frac{P(X=x+a)}{P(X>a)}=\frac{p\cdot q^{x+a-1}}{q^{a-1}}=p\cdot q^{x-1}$$

שזאת ההסתברות לקבל את הערך x במשתנה מקורי. ($q=1-p$).

כעת נעבור למשתנה שסופר את מספר הניסיונות עד קבלת n הצלחות.

משתנה בינומי שלילי: $\boldsymbol{X \sim NB(n,p)}$

סופר את מספר הניסיונות עד קבלת n הצלחות בסדרת ניסיונות ב״ת בעלי הסתברות p כל אחד.

הטווח של X: $n\leq X\leq\infty$.

$$P(X=k)=\binom{n-1}{k-1}p^nq^{k-n}$$

משתנה גיאומטרי $G(p)$ הוא משתנה $NB(1,p)$ כי מחכים להצלחה אחת. משתנה $NB(n,p)$ הוא סכום של n משתנים $G(p)$.

- **שאלה:**

מבצעים סדרת הטלות ב״ת של קובייה תקינה.

X – מספר ההטלות עד שמקבלים פעמיים 4

Y – מספר ההטלות עד מקבלים גם 4 וגם 5

Z – מספר ההטלות עד שמקבלים ת ה-5 הראשון שבא אחרי ה-4 הראשון.

- מתקיים:

$X\sim NB\left(2,\frac{1}{6}\right)$

Y הוא סכום של שני גיאומטרים שוני פרמטר. בהתחלה יש זמן צפיה שמפלג $G\left(\frac{2}{6}\right)$ עד קבלת 4 או 5.

אחרי שמקבלים את אחד מהם אז יש זמן צפיה של $G\left(\frac{1}{6}\right)$ לאחר. זה לא סכום של שני גיאומטרים שווי פרמטר ולכן זה לא משתנה בינומי.

ב-Z מחכים עד הצחה ראשונה של 4, זמן זה מתפלג $G\left(\frac{1}{6}\right)$. אחר כך מחכים זמן $G\left(\frac{1}{6}\right)$ עד קבלת 5.

לכן הזמן הכולל הוא סכום של שני משתנים $G\left(\frac{1}{6}\right)$ ולכן הוא $NB\left(2,\frac{1}{6}\right)$. מתפלג כמו X.

המשתנים X ו-Z יש להם אותה חוקיות. יש להם את אותה התפלגות שהיא התפלגות $NB\left(2,\frac{1}{6}\right)$ אבל הם אינם זהים כי אחד מהם אינו העתק של האחר.

משתנים הם זהים רק אם אחד מקבל בהסתברות 1 את ערכו של האחר.

❖ **שאלה:**

נתון משתנה $X{\sim}NB\left(2,\frac{1}{6}\right)$. מהו $P(X \geq 100)$?

➢ פתרון:

בעקרון זה $\Sigma_{k=100}^{\infty} P(X=k)$ או $1-\Sigma_{k=2}^{100} P(X=k)$.

$X \geq 100$ אומר שלא עצרתי ב-99 הניסיונות הראשונים. זאת אומרת שלא קיבלתי לפחות 2 הצלחות ב-99 הניסיונות הראשונים.

y – מספר ההצלחות ב-99 הניסיונות הראשונים, מבוקש $P(y=1)+P(y=1)$.

מתקיים: $y{\sim}Bin\left(99,\frac{1}{6}\right)$ ולכן:

$$P(y=0)+P(y=1)=\left(1-\frac{1}{6}\right)^{99}+\binom{99}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{98}$$

לא תמיד משתנים שייכים למשפחת התפלגות מסוימת:

❖ **שאלה:**

בכד יש 8 כדורים כחולים ו-6 כדורים ירוקים. אני מוציא ללא החזרה כדורים עד קבלת הכדור הכחול הראשון. מצאו את התפלגות X – מספר הכדורים שאוציא.

➢ פתרון:

הערכים האפשריים הם מ-1 ועד 7, כי בפעם השביעית אני חייב כבר להצליח.

מהו $P(X=k)$?

$$P(X=k)=\frac{\binom{6}{k-1}}{\binom{6+8}{k-1}}\cdot\frac{8}{6+8-(k-1)}$$

בשלב הראשון אני מוציא $k-1$ כדורים מתוך הירוקים. בשלב השני, אני מוציא כדור ירוק ממה שנותר לי.

הדוגמא הנ״ל ממחישה את העובדה שלא כל משתנה הוא ממשפחה מסוימת.

התפלגויות דו ממדיות

לכל צירוף של ערכים של שני משתנים יש הסתברות מסוימת. לפעמים נוח להציג את הצירופים השונים בטבלה:

$X\backslash Y$	0	1	8	P_X
1	0.1	0	0.2	0.3
4	0	0.3	0.4	0.7
P_Y	0.1	0.3	0.6	1

בתוך הטבלה רשומות הסתברויות שהן כמובן אי שליליות והן מסתכמות ב-1. בשולמיים רשומות ההתפלגויות השוליות של כל אחד מהמשתנים. למשל:

$$P(X=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=8)$$

כך עוברים על כל הצירופים שאיתם $X=1$ הולך.

גם כל ההסתברויות בהתפלגויות השוליות של כל משתנה מסתכמות ב-1.

- **דוגמא:**

זורקים 3 כדורים ל-3 תאים. כל הצירופים שווי הסתברות.

X – מספר הכדורים בתא הראשון.

Y – מספר התאים שבהם לפחות כדור אחד.

מצאו את ההתפלגות המשותפת של זוג המשתנים (X,Y).

- פתרון:

נעזר בטבלת התפלגות משותפת:

$X\backslash Y$	1	2	3	P_X
0	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2\binom{3}{2}}{3^3}$	0	$\frac{8}{27}$
1	0	$\frac{\binom{3}{1}2}{3^3}$	$\frac{3!}{3^3}$	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{\binom{3}{2}2}{3^3}$	0	$\frac{6}{27}$
3	$\frac{1}{3^3}$	0	0	$\frac{1}{27}$
P_Y	$\frac{3}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{6}{27}$	1

$X\sim Bin\left(3,\frac{1}{3}\right)$ כי כל כדור נכנס לתא הראשון בסיכוי של $\frac{1}{3}$ באופן ב"ת באחרים. יש סכום של 3 ניסיונות ב"ת שלכל אחד מהם סיכוי $\frac{1}{3}$.

- **דוגמא נוספת:**

מטילים שני סביבונים תקינים.

X – תוצאת הראשון

Z – תוצאת המקסימום

מצאו את ההתפלגות המשותפת של הזוג (X,Z).

➢ פתרון:

נעזר בטבלת התפלגות משותפת:

$X\backslash Z$	**1**	**2**	**3**	**4**	P_X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$
P_X	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

אי תלות בין משנים

זוג משתנים הם ב"ת אם עבור כל (X,Y) מתקיים: $P(X=x,Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y)$.

אם יש באיזשהו מקום צירוף (X,Y) כך ש-$P(X=x,Y=y)\neq P(X=x)\cdot P(Y=y)$ אז יש תלות.

אם בתוך הטבלה יש 0 באיזשהו מקום את ברור שיש תלות ואין אי תלות, כי:

$$P(X=x,Y=y)=0\neq P(X=x)P(Y=y)$$

❖ **דוגמא:** התפלגות המקסימום של שתי הטלות ב"ת של קובייה תקינה

$X\sim U[1,6],Y\sim U[1,6]$ בנוסף: $Z=\max\{x,y\}$

➢ פתרון:

$$P(Z=z)=P(Z\leq z)-P(Z\leq z-1)=\frac{z}{6}\cdot\frac{z}{6}-\frac{z-1}{6}\cdot\frac{z-1}{6}=\frac{z^2}{6}-\frac{(z-1)^2}{36}=\frac{2z-1}{36}$$

נמחיש:

$$P(Z=1)=P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{36}$$

$$P(Z=2)=\left(\frac{2}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{3}{36}$$

$$P(Z=3)=\left(\frac{3}{6}\right)^2-\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{5}{36}$$

$$P(Z=4)=\left(\frac{4}{6}\right)^2-\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{7}{36}$$

$$P(Z=5)=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{9}{36}$$

$$P(Z=6)=\left(\frac{6}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

איך מתפלג המקסימום של n הטלות של קובייה תקינה?

Z – המקסימום של n הטלות של קובייה תקינה.

$$P(Z=z)=\left(\frac{z}{6}\right)^n-\left(\frac{z-1}{6}\right)^n$$

- **דוגמא:** התפלגות של שתי הטלות ב"ת של קובייה תקינה
  - פתרון:

נתחיל בחישובי הסתברות של צירופים שונים:

Z – הסכום $(0\le z\le 12)$

$$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=(\text{בלתי תלוי})=P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{36}$$

$$P(Z=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=\frac{2}{36}$$

$$P(Z=11)=P(X=5,Y=6)+P(X=6,Y=5)=\frac{2}{36}$$

$$P(Z=7)=P(X=1,Y=6)+P(X=2,Y=5)+\cdots+\cdots=\frac{6}{36}$$

$$P(Z=z)=\frac{6-|7-z|}{36}$$

- **שאלה:**

נתונה התפלגות משותפת של שני משתנים (X,Y):

$X\backslash Z$	0	1	2	P_X
1	0.01	0.02	0.03	0.06
2	0.04	0.05	0.15	0.24
3	0.3	0	0.4	0.7
P_X	0.35	0.07	0.58	1

נרצה למצוא את התפלגות Z כאשר Z הוא: $Z=X+Y$.

- פתרון:

$$P(Z=1)=P(X=1,Y=0)=0.01$$

$$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)=0.06$$

$$P(Z=3)=P(X=3,Y=0)+P(X=2,Y=1)+P(X=1,Y=2)=0.38$$
$$P(Z=4)=P(X=3,Y=1)+P(X=2,Y=2)=0.15$$
$$P(Z=5)=P9X=3,Y=2)=0.4$$

התפלגות מותנה

בהינתן מאורע מסוים למשתנה X יכולה להיות התפלגות ששונה מהתפלגותו המקורית. גם בהינתן ערך של משתנה אחד, יכולה להיות למשתנה השני התפלגות חדשה שונה מהמקורית. בהינתן $(Y=y)$ יש למשתנה X התפלגות מסוימת. ניתן לחשב $P(X=x|Y=y)$ לכל ערך x. כך מתקבלת ההתפלגות המותנה.

❖ **דוגמא:**

X,Y זוג הטלות ב"ת של קובייה תקינה. $Z=X+Y$. מה התפלגותו של X בהינתן ש-$Z=Y$, כלומר:

$$P(X=1|Z=4)=\frac{P(X=1,Z=4)}{P(Z=4)}=\frac{P(X=1,Y=4)}{P(Z=4)}=\frac{P(X=1)\cdot P(Y=3)}{P(Z=4)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=2|Z=4)=\frac{P(X=2,Z=4)}{P(Z=4)}=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(Z=4)}=\frac{P(X=2)\cdot P(Y=2)}{P(Z=4)}=\frac{1}{3}$$

באותו אופן גם $P(X=3|Z=4)=\frac{1}{3}$ ולכן בהינתן $Z=4$: $X\sim U[1,3]$.

❖ **דוגמא על התפלגות גיאומטרית:**

$X\sim G(p),Y\sim G(p)$, שני המשתנים הם בלתי תלויים $Z=X+Y$.

א. נמצא את התפלגות Z.

➢ פתרון:

$$P(Z=z)=\Sigma_{x=1}^{z-1}P(X=x,Y=z-x)=$$
$$\Sigma_{x=1}^{z-1}P(X=x)(Y=z-x)=$$
$$\Sigma_{x=1}^{z-1}p\cdot q^{x-1}p\cdot q^{z-x-1}=$$
$$\Sigma_{x=1}^{z-1}p^2\cdot q^{z-2}=$$
$$(z-1)p^2\cdot q^{z-2}=\binom{z-1}{1}p^2\cdot q^{z-2}$$

וקיבלנו משתנה $NB(2,p)$

ב. מה התפלגות X בהינתן $Z=z$?

$$P(X=x|Z=z)=\frac{P(X=x,Z=z)}{P(Z=z)}=\frac{P(X=x,Y=z-x)}{\binom{z-1}{1}p^2\cdot q^{z-2}}$$
$$=\frac{P(X=x)\cdot P(Y=z-x)}{\binom{z-1}{1}p^2\cdot q^{z-2}}=\frac{p\cdot q^{x-1}\cdot p\cdot q^{z-x-1}}{\binom{z-1}{1}p^2\cdot q^{z-2}}=\frac{1}{z-1}$$