שיעור 5 | רקורסיה ומשתנים מקריים | 19/11/17

המשך סוגיה מהשיעור הקודם (הסבר נוסף)

- **שאלה:**

מטילים מטבע 100 הטלות בלתי תלויות. למטבע סיכוי של p לעץ וסיכוי $1-p$ לפלי. נסתכל על המאורעות A_i של מהפך במקום ה-i. זאת אומרת שהתוצאה במקום ה-i שונה מהתוצאה מהמקום ה-$i-1$.

אם אין חפיפה בהטלות אז יש אי תלות.

אם נסתכל על מאורעות A_i ו-A_{i+1}, מתי יש אי תלות?

$$P(A_i) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

$$P(A_{i+1}) = P(A_i) = 2p(1-p)$$

$$P(A_i \cap A_{i+1}) = p(1-p)p + (1-p)p(1-p) = p(1-p)$$

מתי מתקיים: $P(A_i \cap A_{i+1}) = P(A_i)P(A_{i+1})$?

מסתבר שזה קורה רק אם $p=0$ או $p=1$ או $p=\frac{1}{2}$. לכן רק במקרים אלה יש אי תלות.

אם במקום ה-i היה מהפך אז תוצאת ההטלות ה-i ו-$i+1$ הן בהסתברויות שונות. מסימטריה נקבל שכל אחת מהן היא "עץ" בסיכוי $\frac{1}{2}$. אם ההטלה במקום ה-i היא "עץ" אז הסיכוי למהפך במקום ה-$(i+1)$ הוא $1-p$.

אם במקום ה-i היה "פלי" אז כדי שיהי מהפך במקום ה-$(i+1)$ צריך עץ במקום ה-$(i+1)$ ואז הסיכוי הוא p.

אז עבור כל p: $P(A_{i+1}|A_i) = 0.5$.

אבל אם $p \neq \frac{1}{2}$ אז הסיכוי הלא מותנה למהפך במקום ה-$(i+1)$ הוא

$$p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p) \neq \frac{1}{2}$$

ומקבלים: $P(A_{i+1}|A_i) \neq P(A_{i+1})$.

- **סוגיה:**

יש כד שבו 8 כדורים כחולים, 6 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אני מוציא מהכד כדורים עם החזרה. מה הסיכוי שהכדור הראשון שאינו כחול הוא אדום? מה הסיכוי שבפעם הראשונה שהפסקתי לקבל כחולים, קיבלתי אדום?

  - פתרון:

    הסיכוי הוא $\left(\frac{6}{6+5}\right)$ כי מוציאים אותו מבין אלה שהם ירוקים ואדומים.

    פתרונות נוספים:

    - גישה אחת:

      מה ההסתברות שאדום ראשון ייצא במקום i לפני שיתקבלו ירוקים?

$$\left(\frac{8}{8+6+5}\right)^{i-1}\left(\frac{6}{8+6+5}\right)$$

A_1 – זה המאורע שבפעם הראשונה התקבל אדום.

מבוקש: $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$

A_i – הם זרים לכן $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma P(A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \left(\frac{8}{8+6+5}\right)^{i-1}\left(\frac{6}{8+6+5}\right)$.

- גישה אחרת – **בעזרת רקורסיה**:

a – הסיכוי שהתקבל אדום לפני ירוק.

$$a = \frac{6}{8+6+5}\cdot 1 + \frac{5}{8+6+5}\cdot 0 + \frac{8}{8+6+5}\cdot a$$

מתנים בתוצאת המשיכה הראשונה, אם קיבלנו אדום אז הצלחנו.

אם קיבלנו ירוק אז אין אדום לפני ירוק, ולכן כופלים ב-0.

אם קיבלנו כחול אז מחזירים אותו וחוזרים למצב ההתחלתי.

❖ **סוגיה על דו קרב בדרכים שונות**:

קים ודונלד מקיימים דו קרב. בכל שלב תורו של אחד מהם לפגוע באחר. בכל שלב תור מתחלף. הראשון שפוגע הוא המנצח. נניח שקים מתחיל. לקים סיכוי בכל שלב של $\frac{1}{4}$ לפגוע, לדונלד בכל שלב סיכוי של $\frac{1}{3}$ לפגוע. מה הסיכוי של קים לנצח?

➢ פתרון:

- גישה אחת:

הסיכוי של קים לנצח בפעם הראשונה + הסיכוי של קים לנצח בפעם השנייה + הסיכוי של קים לנצח בפעם השלישית...:

$$P = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \cdots = \Sigma_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\cdot 2.3\right)^{i-1}$$

הסיכוי שהמשחק ימשך יותר מ-1000 סיבובים אינו גדול מ- $\left(\frac{3}{4}\right)^{500}$, כי דונלד צריך להיכשל 500 פעמים, וכן הלאה, ולכן הוא קטן מכל קבוע חיובי. למאורע יש הסתברות מסוימת (0 או חיובית) לכן הסתברות המאורע היא כאן 0 בדיוק. המספר היחיד האפשרי שקטן מכל קבוע חיובי.

- גישה אחרת – **בעזרת רקורסיה**:

a – סיכויו של קים לנצח

$$a = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot a$$

תוך שני שלבים או שנפלה הכרעה או שחזרנו למצב ההתחלתי, שזהו תורו של קים.

- פתרון נוסף – **בעזרת רקורסיה**:

a – סיכויו של קים לנצח כאשר זהו תורו

b – סיכויו של קים לנצח כאשר זהו תורו של דונלד

מבוקש a.

$$a = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot b$$

$$b = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot a$$

משתנים מקריים

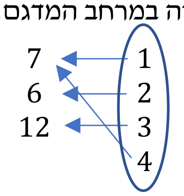
יש מרחב מדגם של תוצאות בסיסיות אפשריות. מתאימים לכל נקודה במרחב המדגם ערך מספרי. בפועל רואים את הערכים המתקבלים. במשתנה המקרי מתקבלים ערכים ממשיים וכל אחד מהם מתקבל בהסתברות כלשהי.

❖ **דוגמא:**

יש מחרב מדגם של הנקודות $\{1,2,3,4\}$.

$$p(1) = 0.1, P(2) = 0.2, P(3) = 0.4, P(4) = 0.3$$

במשתנה מקרי מתאימים ערך ממשי לכל נקודה במרחב המדגם.



אז הערך 7 מתקבל בהסתברות $0.1 + 0.4 = 0.5$.

הערך 6 מתקבל בהסתברות 0.2.

משתנה מקרי מסומן באותיות גדולות X, Y, Z, והוא מקבל ערכים ממשיים.

רושמים למשל: ... $P(X = x)$ אם $P(X = 8) = 0.3$ אז הערך 8 מתקבל בהסתברות 0.3.

רשימת הערכים וההסתברויות שהם מתקבלים בהם היא ההתפלגות של המשתנה.

התפלגות תקינה היא למשל: $P(X = 7) = 0.1, P(X = 8) = 0.35, P(X = 4) = 0.55$. זה תקין כי כל ערך מתקבל בהסתברות אי שלילית וסכום ההסתברויות על פני הערכים הוא 1.

❖ **שאלה:**

נתון מרחב מדגם שבו 4 נקודות בסיסיות שכל אחת מהן מתקבלת בסיכוי $\frac{1}{4}$. בכמה דרכים ניתן לבנות משתנה מקרי שמקיים: $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

- פתרון: $\binom{4}{2}$, צריך ליחס בדיוק שתי תוצאות מהמרחב לכל אחד משני הערכים.

אנחנו נתייחס יותר להתפלגויות ולפונקציית ההסתברות שמתאימה לכל ערך את ההסתברות שבה הוא מתקבל.

משפחות של התפלגויות

א. **משתנה מקרי מנוון**

מקבל רק ערך יחיד ידוע מראש. $P(X=a)=1$ עבור איזשהו a קבוע.

למשל: מספר הראשים של בני אדם, זהו קבוע שווה ל-1 בהסתברות 1.

ב. **משפחת התפלגויות אחידות:** $\boldsymbol{X \sim U[a,b]}$

כאשר a,b הם שלמים ומתקיים $b>a$. זה אומר ש-X מקבל בסיכוי שווה את כל אחד מהערכים השלמים שבין a ל-b.

$P(X=x)=\frac{1}{b-a+1}$ עבור $a \le x \le b$ שלם.

למשל: מושיבים שמונה אנשים לאורך ספסל, כל הסידורים הם שווי הסתברות. X – מיקומו של נועם.

$P(X=x)=\frac{1}{8}$ לכל $1 \le x \le 8$ שלם. כאן $a=1, b=8$. לכן: $P(X=1)=P(X=5)=\frac{1}{8}$.

ג. **משתנה מקרי אינדיקטורי או ברנולי:** $\boldsymbol{X \sim Ber(p)}$

זהו משתנה שמקבל את הערכים: 0 או 1. 1 נחשב להצלחה, ו-0 נחשב לכישלון.

$$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$$

יש כאן פרמטר יחיד של p. אני קורא לו משתנה אינדיקטורי עם פרמטר p. לרוב $0<p<1$.

יכול להיות משתנה שהוא גם ברנולי וגם אחיד: זהו משתנה שמקבל רק את הערכים 1 ו-0 בסיכוי של חצי, כל אחד.

ד. **משתנה מקרי בינומי:** $\boldsymbol{X \sim Bin(n,p)}$

זהו סכום של n משתנים אינדיקטורים בעלי הסתברות p כל אחד. נקרא משתנה בינומי עם פרמטרים n שסופר את מספר הניסיונות ו-p שהוא הסיכוי להצליח בניסוי בודד מבניהם. הניסיונות בלתי תלויים .

למשל: מבצעים סדרה של 8 הטלות בלתי תלויות של קובייה תקינה אז מספר תוצאות ה-6 מתפלג $Bin\left(8,\frac{1}{6}\right)$, סופר את מספר התוצאות של 6.

טווח הערכים של המשתנה הבינומי הוא כל השלמים שבין 0 ל-n.

נסתכל על פונקציית ההסתברות של משתנה $X \sim Bin(n,p)$:

$$P(X=k), 0 \le k \le n, = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ה-$\binom{n}{k}$ זה לטובת בחירת המיקום של ההצלחות.

❖ **שאלה:**

מבצעים 100 הטלות בלתי תלויות של קובייה תקינה. מהי ההסתברות שנקבל לפחות 3 פעמים תוצאות 6.

➢ פתרון:

$$P(X \ge 3)=1-P(X<3)=P(X \le 2)=1-\big(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\big)=$$

$$=1-\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{100}+\binom{100}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{99}+\binom{100}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{98}\right)$$

❖ **משתנה בינומי וכדורים:**

יש כד שבו 3 כדורים לבנים ו-7 כדורים שחורים. איך ניתן לדמות באמצעות הכד משתנה $Bin(100,0.3)$?

נעשה 100 הוצאות עם החזרה, כך ההוצאות הן בלתי תלויות. נספור את מספר הכדורים הלבנים שהתקבלו.

ה. **משתנה מקרי היפר גיאומטרי:** $\boldsymbol{X\sim HP(n;a,b)}$

משתנה היפר גיאומטרי סופר את מספר הכדורים הלבנים המתקבלים ב-n הוצאות ללא החזרה מתוך a כדורים לבנים ו-b כדורים שחורים.

n – מספר הוצאות

a – מספר הכדורים הלבנים

b – מספר הכדורים האדומים

טווח הערכים של X:

א. $0\le x\le n$

ב. $x\le a$

ג. $n-x\le b$

עכשיו ניגש לפונקציית ההסתברות של המשתנה: $P(X=k)=\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$.

האם משתנה בינומי יכול להיות גם משתנה היפר גיאומטרי? כן, אם $n=1$ אז הוצאתי רק כדור אחד, אין לו במי להיות תלוי.

האם יכול להיות שמשתנה היפר גיאומטרי יהיה משתנה מקרי מנוון? כן, אם $n=(a+b)$ אז אני מוציא את כל הכדורים השחורים והלבנים, וזהו משתנה מקרי מנוון.

עכשיו נעבור למשתנים מקריים שסופרים את מספר הניסיונות עד קבלת מספר מסוים של הצלחות נתון מראש.

ו. **משתנה מקרי גיאומטרי:** $\boldsymbol{X\sim G(P)}$

מדובר בסדרת ניסיונות בלתי תלויים בעלי הסתברות p כל אחד וסופרים את הזמן עד קבלת הצלחה ראשונה.

טווח הערכים של X הוא כל ערך טבעי שלם וחיובי.

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$$

למשל: אני אוכל סופגניות עד וכולל שמגיע לסופגנייה עם ריבה. בכל סופגנייה יש ריבה בסיכוי p באופן בלתי תלוי באחרות. X – מספר הסופגניות שאני אוכל. $X\sim G(p)$. $P(X=6)=p\cdot(1-p)^5$.

- **שאלה:**

אני מבצע סדרה של הטלות ב"ת של קובייה תקינה עד קבלת תוצאה 6. מהי ההסתברות שאעשה יותר מ-8 הטלות?

- פתרון:

X – מספר ההטלות, $X\sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

$$P(X>8)=\left(1-\frac{1}{6}\right)^8$$

טבלת משתנים והתפלגויות

משנה	סימון	פרמטרים	משמעות	ערכים אפשריים	פונקציית הסתברות	תוחלת	שונות
אחיד	$X \sim U[a,b]$	$a<b$ שלמים	מקבל את כל אחד מהערכים בסיכוי שווה	מסי שלמים: $a \le k \le b$	$P(X=k)=\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
בינומי	$X \sim Bin(n,p)$	n – מספר ניסיונות p – סיכוי להצלחה בכל ניסוי	סופר את מספר הניסיונות ב-n ניסיונות ב״ת שבכל אחד מהם יש סיכוי p להצלחה	מסי שלמים: $0<k<n$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(p-1)$
היפר-גיאומטרי	$X \sim HG(n;a,b)$	a – מספר כדורים לבנים b – מספר כדורים שחורים n – מספר הוצאות של כדורים ללא החזרה	סופר את מספר הכדורים הלבנים שמתקבלים ב-n הוצאות ללא החזרה	מסי שלמים: $0 \le k \le n$ $n-b \le k \le a$	$P(X=k)=\frac{\binom{a}{k}\binom{n-a}{b-k}}{\binom{n}{b}}$	$n\frac{a}{a+b}$	$n\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}\left(1-\frac{n-1}{a+b-1}\right)$
גיאומטרי	$X \sim G(P)$	p – סיכוי להצלחה בניסוי בודד $0<p<1$	סופר את מספר הניסיונות עד וכולל קבלת הצלחה בסדרת ניסיונות בלתי תלויים שווי הסתברות	יכול לקבל כל ערך טבעי	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
בינומי-שלילי	$X \sim NB(n,p)$	p – סיכוי להצלחה בניסוי בודד n – מספר ההצלחות שצריך לצבור	סופר את מספר הניסיונות עד קבלת n הצלחות בסדרת ניסויים בלתי תלויה	כל טבעי שגדול או שווה ל-n	$P(X=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(p-1)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$\frac{nq}{p^2}$
פואסוני	$X \sim P(\lambda)$	λ – שהוא ממשי חיובי	מודד מספר אירועים. ככל שהפרמטר גדול יותר, כך צפויים יותר אירועים	כל השלמים האי-שליליים	$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	λ	λ