שיעור 4 | הסתברות מותנית | 11/12/17

חזרה

- **שאלה:**

מכניסים 4 כדורים ל-3 תאים. כל הצירופים שווי הסתברות. מה ההסתברות שבכל תא יהיה לפחות כדור אחד?

- פתרון: נחשב קודם את מרחב המדגם: $|\Omega| = 3^4$, כעת נבחר את 2 הכדורים שיהיו ביחד ואז נכפול בכמות הסידורים האפשריים, כלומר: $\binom{4}{2} \cdot 3!$. לכן בסה״כ ההסתברות היא: $\frac{\binom{4}{2}\cdot 3!}{3^4}$.

הסתברות מותנה

- **שאלה:**

בחרתי 5 קלפים ללא החזרה. הסתבר שכולם אדומים. מהי ההסתברות שכולם לבבות?

- פתרון:

נשתמש בנוסחה להסתברות מותנה

A – המאורע שכולם אדומים

B – המאורע שכולם לבבות

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{26}{5}}$$

הגדרנו הסתברות מותנה של B בהינתן A להיות: $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

כלל השרשרת:

הגדרה: $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

דוגמא:

כדי לפגוש אותך אני צריך להגיע לתל אביב, זה קורה בסיכוי 0.6, ושם לפגוש אותך, זה קורה בסיכוי 0.3-.

B – אגיע לתל אביב, A – אפגוש אותך. מתקיים: $P(A \cap B) = P(A|B)P(A) = 0.6 \cdot 0.3$.

כלל השרשרת ל-3 מאורעות: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) = P(A \cap B)P(C|A \cap B)$.

כלל השרשרת ל-n מאורעות: $P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i)$

דוגמא:

כדי להתקבל אני צריך לעבור 3 מבחנים. אני עובר את המבחן הראשון בסיכוי 0.7, את השני בסיכוי 0.8 ואם אני עובר את שניהם אז אני עובר את השלישי בסיכוי של 0.4. ולכן:

$$P(\text{אני מתקבל}) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) = 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.4$$

נגדיר אי תלות בין זוג מאורעות:

הגדרה: אם $P(A) \neq 0$ אז המאורעות A, B נקראים בלתי תלויים אם ורק אם $P(B|A) = P(B)$. קיומו של מאורע A לא משנה את הסיכויים של B להתרחש.

נראה קריטריון לאי תלות:

זוג מאורעות A, B הם בלתי תלויים אם $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

מהנוסחה של הסתברות מותנה מקבלים $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

ואם ורק אם $P(B) = P(B|A)$ אז מתקיים $P(B|A) = P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ואז $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

הסתברות שלמה

עבור קבוצת מאורעות $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ שהם זרים ואיחורים הוא Ω, זאת אומרת שבכל מקרה בדיוק אחד מהם מתרחש, מתקיים:

$$P(B) = \Sigma_{i=1}^{n}\left(P(A_i) \cdot P(B|A_i)\right)$$

- **דוגמא:**

אני נוסע לחיפה בסיכוי 0.3, לתל אביב בסיכוי 0.5 ולירושלים בסיכוי 0.2. אני נוסע לבדיוק אחת מהערים האלה. בחיפה ירד גשם בסיכוי 0.5, בתל אביב ירד גשם בסיכוי 0.1, ובירושלים ירד גשם בסיכוי 0.4. מה הסיכוי שירד גשם איפה שאני אהיה?

- פתרון:

A_1 – נסעתי לחיפה

A_2 – נסעתי לתל אביב

A_3 – נסעתי לירושלים

B – ירד גשם היכן שהייתי.

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$$
$$= 0.3 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.4$$

(ניתן לצייר תרשים עץ כדי להגיע לתשובה ולראות את החישוב יותר וויזואלית.)

- **שאלה:**

לליאת ארון עם 10 מגירות. היא שמה את המפתח בארון בסיכוי 0.9 ואז בסיכוי שווה בכל אחת מהמגירות. בסיכוי של 0.1 המפתח מחוץ לארון. המפתח לא נמצא ב-9 המגירות הראשונות, מהו הסיכוי שהמפתח נמצא במגירה העשירית?

- פתרון:

B – המפתח במגירה העשירית

A – הוא לא באחת מ-9 הראשונות

רוצים לחשב $P(B|A)$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B|A)}{0.9\cdot 0.1+0.1}=\frac{0.09}{0.19}=\frac{9}{19}$$

אי תלות בזוגות ואי תלות כללית:

❖ **דוגמא**

יהי A המאורע שבו לטל ולשרון יש יום הולדת באותו תאריך.

יהי B המאורע שבו לטל ולאיתן יש יום הולדת באותו תאריך.

יהי C המאורע שבו לטל ולאיתן יש יום הולדת באותו תאריך.

האם A,B תלויים?

$$P(A)=\frac{1}{365}=\frac{365}{365^2}=P(B)$$
$$P(A\cap B)=\frac{365}{365^3}=\frac{1}{365^2}$$

קיבלנו ש:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{365^2}=\frac{1}{365}\cdot\frac{1}{365}=P(A)\cdot P(B)$$

לפי הקריטריון לאי תלות – שני המאורעות A,B הם בלתי תלויים. באופן דומה A,C וגם B,C בלתי תלויים.

- נשאל כעת את השאלה: האם שלושת המאורעות A,B,C בתי תלויים כקבוצת מאורעות? האם קיומם של A וגם B משפיע על הסיכוי ש-C יתרחש?

  בוודאות C מתרחש אם A,B מתרחשים!

  מתקיים: $P(C|A\cap B)=1\neq P(C)$, כלומר: הצירוף של A,B משפיע על C.

  גם <u>לא</u> מתאיים: $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$.

<u>הגדרה</u>: אי תלות כללית בין מאורעות אומרת שכל צירוף של מאורעות <u>לא</u> משפיע על צירוף אחר של מאורעות.

כאן ראינו דוגמא לכך שיש אי תלות בזוגות אבל <u>אין</u> אי תלות כללית.

❖ **סוגיה:**

מטילים n מטבעות, הטלות בלתי תלויות. ידוע שלפחות אחד מהמטבעות הוא הוגן. מהי ההסתברות שמספר העצים יהיה זוגי?

- פתרון:

  A – המאורע שהסכום זוגי

B – המאורע שהסכום של כולם חוץ מהמטבע ההוגן הוא זוגי

$$P(A) = P(B \cap \text{אחרון כשלון}) + P(\bar{B} \cap \text{אחרון עץ}) =$$
$$P(B) \cdot P(\text{אחרון כשלון}) + P(\bar{B}) \cdot P(\text{אחרון עץ}) =$$
$$P(B) \cdot 0.5 + P(\bar{B}) \cdot 0.5 =$$
$$0.5\big(P(B) + P(\bar{B})\big) =$$
$$0.5 \cdot 1 = 0.5$$

בודדנו את אחד מהמטבעות שהוא הוגן. אם יש כמה הוגנים את נבודד עדין רק אחת הם.

כלל בייס

אמרנו ש: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

את $P(A \cap B)$ ניתן לחשב לפי: $P(B) \cdot P(A|B)$.

נקבל את נוסחת בייס: $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$.

- **דוגמא**

יש כד עם 90 כדורים לבנים ו-10 כדורים שחורים,

ויש כד עם 10 כדורים לבנים ו-90 כדורים שחורים.

אני בוחר באקראי בסיכוי שווה באחד הכדים ומוציא ממש כדור. קיבלתי כדור לבן. מה הסיכוי שמדובר בכד הראשון?

- פתרון:

A – מדובר בכד הראשון

B – קיבלתי כדור לבן

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot \frac{90}{90+10}}{0.5 \cdot \frac{90}{90+10} + 0.5 \cdot \frac{10}{90+10}}$$

המשמעות של כלל בייס כאן היא הסדר של הדברים. לא ניתן להסתכל על ההסתברות באופן שמסתכלים קודם על הכדור ואז על הכד, כי קודם אני בוחרת כד ורק אז מוציאה כדור.

- **סוגיה**

נתונים 2 כדים: בכד הראשון יש 20 כדורים כחולים ו-10 כדורים כחולים.

בכד השני יש 15 כדורים כחולים ו-25 כדורים ירוקים.

בוחרים בסיכוי 0.3 בכד הראשון ובסיכוי 0.7 בכד השני.

מתחילים לבצע סדרה של הוצאות עם החזרה של כדורים.

א. מה הסיכוי ששני הראשונים יהיו כחולים?

➢ פתרון:

A – בחרתי בכד הראשון

B – שני הראשונים כחולים

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) =$$

$$0.3 \cdot \left(\frac{20}{20+10}\right)^2 + 0.7\left(\frac{15}{15+25}\right)^2$$

ב. מהי ההסתברות ששלושת הראשונים הם כחולים בהינתן ששני הראשונים הם כחולים?

➢ פתרון:

C – שלושת הראשונים כחולים

$$P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{0.3 \cdot \left(\frac{20}{20+10}\right)^3 + 0.7\left(\frac{15}{15+25}\right)^3}{0.3 \cdot \left(\frac{20}{20+10}\right)^2 + 0.7\left(\frac{15}{15+25}\right)^2}$$

גישה נוספת לפתרון:

לאור שתי ההוצאות הראשונות נחשב מה הסיכוי שאנו בכל אחד מהכדים. אם אנו בכד הראשון אז הסיכוי בהמשך הוא $\frac{20}{20+10}$ ואם אנו בשני אז הסיכוי הוא $\frac{15}{15+25}$.

הסיכוי כולו הוא:

$$P(A|B) \cdot \left(\frac{20}{20+10}\right) + P(\bar{A}|B) \cdot \left(\frac{15}{15+25}\right)$$

אנחנו רוצים לחשב את הסיכוי שאנחנו בכד הראשון בהינתן שקיבלנו 2 כחולים ואז הסיכוי שאנחנו בכד השני בהינתן שקיבלנו 2 כדורים.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.3 \cdot \left(\frac{20}{20+10}\right)^2}{0.3 \cdot \left(\frac{20}{20+10}\right)^2 + 0.7\left(\frac{15}{15+25}\right)^2}$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

❖ **סוגיה**

מבצעים 10 הטלות בלתי תלויות של מטבע שנופל על h בסיכוי p, $1 > p > 0$.

מסתכלים על הרצפים של שני h עוקבים.

יכולים להתקבל רצפים בכל אחד מ-9 מקומות. האם רצף במקום אחד תלוי ברצף במקום 6? לא! כי אין תלות בין המאורעות. יש תלות בין רצפים שונים רק כאשר יש חפיפה ביניהם. למשל למקומות 4,5 יש תלות עם מקומות 5,6 כי יש הטלה משותפת.

אם קיבלתי רצף במקום 4,5 אז יש לי כבר הצלחה במקום 5 וזה מקרב אותי לרצף במקומות 5,6.

הסיכוי המקורי לרצף במקומות 5,6 הוא p^2.

בהינתן שיש רצף במקומות 4,5 הוא p.

ההסתברות המותנה לא שווה להסתברות המקורית.

A_i – רצף החל ממקום i

$$P(A_{i+1}|A_i) = p \neq p^2 = P(A_{i+1})$$

או בצורה אחרת:

$$P(A_i \cap A_{i+1}) = p^3 \neq= p^2 \cdot p^2 = P(A_i) \cdot P(A_{i+1})$$

וזה מראה שיש תלות.

- **סוגיה**

כעת נסתכל על מהפכים. A_i הוא המאורע שבהטלה ה-i קיבלנו תוצאה שונה מאשר בהטלה ה-$(i+1)$.

אילו זוגות של A_i הם תלויים ועבור אילו ערכי p זה מתקיים?

זוגות שאין להם חפיפה הם בכל מקרה בלתי תלויים.

נשאר להסתכל רק על זוגות שכנים:

$$P(A_i \cap A_{i+1}) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

$$P(A_i \cap A_{i+1}) = p(1-p)p + (1-p)p(1-p) = p(1-p)$$

מתי מתקיים: $P(A_i \cap A_{i+1}) = P(A_i) \cdot P(A_{i+1})$? כאשר יש אי תלות!

$$p(1-p) = [2p(1-p)]^2$$

יש שוויון רק עבור $p = 0.5$.