- **סוגיה:**

זורקים n כדורים ל-m תאים. כל הצירופים שווי הסתברות.

א. מה ההסתברות שבכל תא יהיה בדיוק כדור אחד, אם $n=m$.

- פתרון:

כלומר מה הסיכוי שכל התאים יהיו מלאים?

קודם כל נחשב את מרחב המדגם: $|\Omega|=m^n=n^n$.

במקרה שלנו $m=n$, הכדורים אינם זהים ולכן: $|A|=n!$ ובסה"כ: $P=\frac{n!}{n^n}$.

ב. נניח גם כאן כי $n=m$. מה ההסתברות שכל הכדורים ילכו לאותו התא?

- פתרון:

$|A|=n$ כי קיימות n אופציות לבחירת התא. ולכן: $P=\frac{n}{n^n}$

ג. נניח ש-$m=n-1$. מה ההסתברות שבכל תא יהיה לפחות כדור אחר?

- פתרון:

$|\Omega|=(n-1)^n$, $|A|=(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!$. הסבר: קודם נבחר את התא שבו יהיה יותר מכדור אחד, אחרי זה נבחר שני כדורים מתוך n שיהיו בתא ביחד ואחרי זה נותר לסדר $n-2$ כדורים ב-$n-2$ תאים, כדור אחד בכל תא.

ד. נניח ש-$m=n-2$. מה ההסתברות שבכל תא יהיה לפחות כדור אחד?

- פתרון:

$|\Omega|=(n-2)^n$

$|E|$ – מספר האפשרויות שבהן יש תל אחד של 3 כדורים וביחד יש כדור בכל תא.

$|F|$ - מספר האפשרויות שבהן יש 2 תאים של שני כדורים וביתר התאים יש כדור אחד בכל תא.

$$|D|=|E|+|F|$$

מתקיים: $|E|=(n-2)\binom{n}{3}(n-3)!$, $|F|=\binom{n-2}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}(n-4)!$

ולכן בסה"כ: $P=\frac{(n-2)\binom{n}{3}(n-3)!+\binom{n-2}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}(n-4)!}{(n-2)^n}$

עקרון ההכלה וההפרדה

רוצים לחשב $P(A\cup B)$ כאשר A,B אינם זרים: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

- **דוגמא:**

בוחרים באקראי בסיכוי שווה מספר המורכב מהאותיות a,b,c.

A – האות a לא מופיעה

B – האות b לא מופיעה

אורך המילה הוא 8. נראה כי: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

- פתרון:

$P(A)=P(B)=\frac{2^8}{3^8}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3^8}$ ואז נקבל את הדרוש: $P(A\cup B)=\frac{2^8}{3^8}+\frac{2^8}{3^8}-\frac{1}{3^8}$.

- **דוגמא:**

נתונה חפיסה של קלפים של $4\cdot 13=52$ קלפים. בוחרים ללא החזרה 13 קלפים. מהי ההסתברות שלפחות סדרה אחת לא תופיע?

- פתרון:
  - A – לב לא מופיע
  - B – מעוין לא מופיע
  - C – תלתן לא מופיע
  - D – עלה לא מופיע

  נשים לב כי $P(A\cap B\cap C\cap D)=0$.

$$P(A\cup B\cup C\cup D)=\binom{4}{1}P(A)-\binom{4}{2}P(A\cap B)+\binom{4}{3}P(A\cap B\cap C)-\binom{4}{4}P(A\cap B\cap C\cap D)$$

נחשב: $P(A\cap B\cap C)=\frac{\binom{52-39}{13}}{\binom{52}{13}}$, $P(A\cap B)=\frac{\binom{52-26}{13}}{\binom{52}{13}}$, $P(A)=\frac{\binom{52-13}{13}}{\binom{52}{13}}$. מציבים מקבלים את הפתרון.

- **דוגמא:**

בוחרים מילה מבין המילים שמורכבות מהאותיות a,b,c באורך 10, לכל מילה יש סיכוי שווה להיבחר.

א. מה ההסתברות שלפחות אות אחד לא תופיע?

- פתרון:

  A – המילים שבהם a לא מופיעה

  B – המילים שבהם b לא מופיעה

  C – המילים שבהם c לא מופיעה

  ונרצה לחשב את $P(A\cup B\cup C)$:

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2^{10}}{3^{10}},\qquad P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{1}{3^{10}}$$

מציבים במשוואה ומקבלים את הפתרון.

ב. מה ההסתברות שלפחות אות אחת לא תופיע יותר מפעם אחת?

- פתרון:

  A_0 – המילים שבהם a מופיעה 0 פעמים

  A_1 – המילים שבהם a מופיעה 1 פעמים

$$3P(A_0)+3P(A_1)-\binom{3}{2}P(A_0\cap B_0)-\binom{3}{2}P(A_1\cap B_1)-3\cdot P(A_0\cap B_1)$$

$$P(A_0)=\frac{2^{10}}{3^{10}},P(A_1)=\frac{10\cdot 2^9}{3^{10}},P(A_0\cap B_0)=\frac{1}{3^{10}},\ P(A_1\cap B_1)=\frac{10\cdot 9}{3^{10}},\ P(A_0\cap B_1)=\frac{10}{3^{10}}$$

מציבים ומקבלים את הפתרון.

פתרון בדרך נוספת:

$P($קיימת אות שמופיעה פחות מפעמיים$) = 1 - P($כל אות מופיעה לפחות פעמיים$)$

נגדיר B להיות המאורע שכל אות מופיעה לפחות פעמיים.

*הפתרון שניתן כאן אפשרי רק הודות לכך שהמילה היא קצרה יחסית (באורך 10).

a	b	c	
6	2	2	3
5	3	2	3!
4	4	2	3
4	3	3	3

$$|B| = 3\binom{10}{6}\binom{4}{2} + 3!\binom{10}{5}\binom{5}{3} + 3\binom{10}{4}\binom{6}{4} + 3\binom{10}{4}\binom{6}{3}$$

❖ **דוגמא: בעיית המזכירה הרשלנית**

מחלקים n מכתבים ל-n אנשים זרים. לכל אחד מתאים בדיוק מכתב אחד. מחלקים באקראי כך שכל אחד מהסידורים הוא שווה הסתברות. מה ההסתברות שלפחות אדם אחד יקבל את המכתב שמתאים לו?

➢ פתרון:

A_i – המאורע שבו האדם ה-i מקבל את המכתב המתאים.

מבוקש: $P(\cup_{i=1}^{n} A_i)$

$$P(A_1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P\left(\cap_{i=1}^{k} A_i\right) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{(n-k)!\,k!}{n!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{\binom{n}{k}k!}$$

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \Sigma_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot P\left(\cap_{i=1}^{k} A_i\right)(-1)^{k+1} = \Sigma_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}k!}(-1)^{k+1} = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

הסתברות מותנה

$P(A|B)$ זו ההסתברות של המאורע A בהינתן שאנו יודעים שהמאורע B התרחש.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

בהינתן המאורע B אנחנו יודעים שאנו נמצאים בעולם של מאורע B. רוצים לדעת מה הסיכוי שגם A התרחש. זה חלקו של $B \cap A$ מתוך B.

❖ **דוגמא:**

מטילים קובייה תקינה.

B – לא התקבלה תוצאה 5

A – התקבלה תוצאה זוגית.

מהו $P(A|B)$?

➢ פתרון: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{6}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{5}$.

❖ **דוגמא:**

במשפחה יש 2 ילדים, כל ילד הוא בן בסיכוי חצי ובאופן בלתי תלוי בלידה האחרת.

א. נניח שהראשון הוא בן. מה ההסתברות ששניהם בנים?

ב. נניח שלפחות אחד הוא בן. מה ההסתברות ששניהם בנים?

➢ פתרון:

באופן אינטואיטיבי נקבל $\frac{1}{2}$, ובאופן פורמלי: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

נגדיר C – לפחות בן אחד, A – שניהם בנים. נקבל: $P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$