שיעור 2 | קומבינטוריקה | 29/10/17

זהויות

א. זהות פסקל: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

הוכחה קומבינטורית:

אגף שמאל: בוחרים k אנשים מתוך n

אגף ימין: גם כאן אנחנו בוחרים k אנשים מתוך n באופן הבא: את אוסף הבחירות האפשריות מחלקים לשני סוגים שונים. במקרה הראשון לא בוחרים את 'שרון' אז בוחרים k אנשים מתוך $n-1$, במקרה השני בוחרים בשרון ובעוד $k-1$ אחרים.

ב. הבינום של ניוטון: $(a+b)^n=\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

הביטוי $(a+b)^n$ מורכב מסכום של מכפלות בכל מכפלה מופיעים a ו-b עם חזקה מסויימת. כמה פעמים מופיע ב-$(a+b)^n$ הביטוי $a^k n^{n-k}$? הטענה היא שזה מופיע $\binom{n}{k}$ פעמים.

n פעמים... $(a+b)^n=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$. כדי לקבל את $a^k b^{n-k}$ צריך ב-k סוגריים לבחור את a וב-$(n-k)$ סוגריים לבחור את b.

ג. צריך להוכיח: $\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

הוכחה אלגברית: נסמן $a=b=1$, לפי נוסחת הבינום: $2^n=(1+1)^n=\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^n 1^{n-k}=\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

הוכחה קומבינטורית:

אגף ימין: מספר תתי קבוצות של קבוצה בגודל n.

אגף שמאל: נסכום את מספר האפשרויות לבחירת k מתוך n, כאשר $0\le k\le n$.

מרחב הסתברות

אוסף של תוצאות אלמנטריות w. אלה הן נקודות המדגם – מרחב המדגם. הקבוצה כולה של כל תוצאות מרחב המדגם תסומן על ידי Ω. נסתכל על אוסף של מאורעות, מרחב המדגם. האוסף הוא $\{A_i\}$. כל מאורע הוא קבוצה של נקודות ממרחב המדגם. אוסף הקבוצות האלה סגורות לפעולות איחוד, חיתוך ומשלים. הוא סגור גם לאיחור וחיתוך בן מניה של קבוצות.

למרחב הסתברות יש אלמנט נוסף חשוב: לכל קבוצה (מאורע) במרחב ההסתברות מתאימים מספר, זו ההסתברות של המאורע הזה. לדוגמא: $P(A_i)$ הוא מספר שמתאימים ל-A_i והוא ההסתברות של המאורע A_i.

תכונות ראשוניות:

א. הקבוצות $\emptyset$ ו-Ω הן תמיד חלק מהאוסף.

ב. $P(\Omega)=1$.

ג. אם $\{A_i\}$ אוסף של מאורעות זרים אז $P(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)=\Sigma_{i=1}^{\infty}P(A_i)$, מדובר על איחוד מן מניה אינסופי.

תכונות נוספות:

א. $P(\emptyset) = 0$

ב. כאשר $\{A_i\}$ זרות אז $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i)$

ג. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

ד. אם $A \subseteq B$ אז $P(B) \le P(A)$

ה. $0 \le P(A_i) \le 1$ לכל קבוצה A_i.

נוכיח את התכונות הנוספות:

א. נגדיר $A_i = \emptyset$ לכל $1 \le i \le \infty$. אז מתקיים $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) = P(\emptyset)$.
זאת כי קבוצה ריקה זרה לכל קבוצה אחרת $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$,
וקיבלנו כי: $P(\emptyset) = P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$.
השוויון $P(\emptyset) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$ לא יכול להתקיים אם $P(\emptyset) \neq 0$ ולכן $P(\emptyset) = 0$.

ב. נגדיר את אוסף המאורעות $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$: עבור $1 \le i \le n$ יתקיים $B_i = A_i$ ועבור $i > n$ יתקיים $B_i = \emptyset$.
מהנתון $\{A_i\}$ קבוצות זרות ולכן גם $\{B_i\}$ קבוצות זרות, ולכן:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(B_i) + \Sigma_{i=n+1}^{\infty} P(B_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(B_i) + 0 = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i)$$

קיבלנו $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i)$

אבל $\cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ ולכן: $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i)$.

ג. A ו-$\bar{A}$ הן קבוצות זרות ולכן:

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1 \quad \Longrightarrow \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

ד. $A = B \cup (A \backslash B)$. מתקיים כי B ו-$(A \backslash B)$ הן זרות ולכן:

$$P(A) = P(B) + P(A \backslash B) \ge P(B)$$

ה. לפי סעיף ד' מכיוון ש-$\emptyset \subseteq A$ אז $0 = P(\emptyset) \le P(A)$ ולכן $P(A) \ge 0$.
מכיוון ש-$A \subseteq \Omega$ אז $P(A) \le P(\Omega) = 1$ ולכן $P(A) \le 1$.

מרחבי הסתברות סימטריים

במרחב ההסתברות הסימטרי לכל נקודה w יש את אותה הסתברות, לכן: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

❖ **דוגמא:**
מושיבים 20 אנשים לאורך שורה בצורה אקראית, כשכל אחד מהסידורים הוא שווי הסתברות. מה הסיכוי שטל תשב במקום השמיני?

➢ פתרון: נקבע את טל במקום השמיני ולכן $|A| = 19!$ ו-$|\Omega| = 20!$ ומכאן נקבל: $P = \frac{19!}{20!} = \frac{1}{20}$.

❖ **דוגמא:**
מסדרים 20 אנשים לאורך שורה. מהי ההסתברות ששרון לא תשב ליד ספיר?

➢ פתרון: נחשב בעזרת המשלים. מה ההסתברות ששרון וספיר יושבות אחת ליד השנייה?

$|A| = 19!\,2!$ ובנוסף $|\Omega| = 20!$ ולכן ההסתברות היא $P = 1 - \frac{19!2!}{20!}$.

❖ **דוגמא:**

בוחרים 13 קלפים מתוך חפיסה של 52 קלפים ללא החזרה. מה ההסתברות שהם מכילים בדיוק 5 לב?

➢ פתרון: $|\Omega| = \binom{52}{13}$, $|A| = \binom{13}{5}\binom{52-13}{8}$ ולכן $P = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

❖ **דוגמא:**

מושיבים סביב מעגל 10 אנשים, מה ההסתברות שקרינה תשב ליד שחר? נפתור בכמה דרכים.

➢ פתרון:

- $|\Omega| = 9!$ ו-$|A| = 2!\,8!$, נושיב אותן בגוש כפול סידורים פנימיים ונקבל: $P = \frac{2!8!}{9!} = \frac{2}{9}$.
- $|\Omega| = \binom{9}{2}$, זה מייצג את מספר האפשרויות לבחור לקרינה 2 שכנים. $|A| = \binom{1}{1}\binom{8}{1}$ זה מייצב שאחד מהשכנים היא שחר והשני מתוך האחרים שנותרו, נקבל: $P = \frac{\binom{1}{1}\binom{8}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.
- קרינה כבר יושבת. לשחר יש בסך הכל 9 מקומות אפשריים ולכן $|\Omega| = 9$, בשניים מהם היא שכנה של קרינה ולכן $|A| = 2$, נקבל $P = \frac{2}{9}$.

<u>זהירות ממרחב מדגם לא סימטרי</u>!

❖ **שאלה:**

מהי ההסתברות שלשרון, שחר ותום יש ימי הולדת בתאריכים שונים?

➢ פתרון:

$$|\Omega| = 365^3$$

$$|A| = 365 \cdot 364 \cdot 363$$

$$P = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} = \frac{364 \cdot 363}{365^2}$$

❖ **שאלה:**

בונים מילה באורך 20 מהאותיות a, b, c כך שלכל מילה יש אותה הסתברות. מהי ההסתברות שלפחות אחת מבין האותיות a ו-b לא תופיע?

➢ פתרון:

$$|\Omega| = 3^{20}$$

A – המאורע ש-a לא מופיעה

B – המאורע ש-b לא מופיעה

$D = A \cup B$ – המאורע שלפחות אחת מבין האותיות a, b לא תופיע.

מתקיים:

$$P(A) = P(B) = \frac{2^{20}}{3^{20}},\ \ P(A \cap B) = \frac{1}{3^{20}}$$

ולכן נקבל: $P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2^{20}}{3^{20}} + \frac{2^{20}}{3^{20}} - \frac{1}{3^{20}}$