שיעור 1 | מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות 22/10/17

- **סוגיה**

יש 2 כדים.

בכד א': 90 כדורים כחולים, ו-10 כדורים אדומים

בכד ב': 90 כדורים אדומים ו-10 כדורים כחולים

הכדור הראשון שהוצאתי היה כחול. כעת, מאותו כד מוציאים עוד כדור. אם הראשון היה כחול אז הסיכוי שהשני כחול הוא יותר מחצי, וזאת גם אם יש או אין החזרה. ההסבר הוא שהכדור הראשון נתן אינדיקציה חזקה לכך שמדובר בכד א' שבו יש רוב של כדורים כחולים בכל מקרה. הסיכוי שמדובר בכד השני הוא קטן.

מושגים בתורת הקבוצות

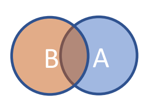
מושג	הסבר	דוגמא
קבוצה	אוסף של איברים, מסומנים באופן הבא: { } לשתי קבוצות יש סימון שונה: קבוצה אחת היא הקבוצה הריקה, $\emptyset$, והקבוצה השניה היא הקבוצה שמכילה את כל העולם שלנו והיא מסומנת ב-Ω	$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{x\mid x^2=1\}$ $C=\emptyset$
$\in$	שייך לקבוצה	$3\in\mathbb{N}$ $2\in A=\{1,2,3,4\}$
$\subseteq$	הכלה של קבוצה	$A=\{1,2,3,4\}, B=\{1,2\}$ $B\subseteq A$

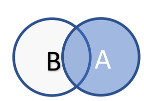
פעולות בין קבוצות

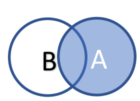
מושג	סימון	הסבר
איחוד	$A\cup B$	קבוצה של איברים ששייכים או ל-A או ל-B
חיתוך	$A\cap B$	קבוצה של איברים ששייכים גם ל-A וגם ל-B
חיסור	$A\setminus B$	קבוצת האיברים שייכים ל-A אבל לא ל-B
משלים	A^c or $\bar{A}$	כל האיברים שבעולם שלנו, אבל לא שייכים ל-A.

לפעמים נידרש להוכיח זהויות או טענות אחרות לגבי קבוצות. למשל: נרצה להוכיח $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A$.

דרכים להוכיח:

א. בעזרת דיאגרמה: נניח כי 

A פירושו: 

. $(A\cap B)\cup(A\setminus B)$ פירושו: 

, ולכן מתקבל שוויון.

ב. בעזרת הכלה דו כיוונית:

נראה שאגף שמאל מוכל באגף ימין ולהיפך ואז נסיק שוויון.

❖ **שאלה:**

יש קבוצה של 4 בנות ו-3 בנים ונרצה להרכיב זוג שיש בו בן ובת. כמה אפשרויות יש לנו?

➢ פתרון: $3 \cdot 4 = 12$, יש לנו 4 אופציות לבנות ו-3 אופציות לבנים.

❖ **שאלה:**

יש n אנשים, בכמה דרכים אפשר לבחור נשיא וגזבר?

➢ פתרון: אם הם שני אנשים שונים אז הפתרון הוא $n(n-1)$, לתפקיד הראשון יש n אופציות, ולתפקיד השני נותר לבחור מישהו מבין $n-1$ אופציות שנשארו. אם לאותו אדם מותר לקחת את שני התפקידים אז הפתרון הוא n^2, כי לתפקיד הראשון יש n אפשרויות וגם לתפקיד השני.

❖ **שאלה:**

יש לסדר n אנשים בשורה, כמה אפשרויות יש לעשות זאת?

➢ פתרון: $n!$, השתמשנו בעקרון הכפל, בכל שלב הכפלנו את מספר האופציות.

❖ **שאלה:**

יש n אנשים, רוצים לסדר אותם בשורה כך שדני ורמי יהיו סמוכים, כמה אפשרויות יש?

➢ פתרון: $2(n-1)!$. נתייחס לדני ורמי כגוש אחד עם 2 סידורים פנימיים ואז נכפיל בכמות האופציות שנותרה לסידור בשורה.

❖ **שאלה:**

כמה מילים באורך 10 יש שמורכבות מהאותיות א ו-ב קיימות?

➢ פתרון: 2^{10}. בכל שלב יש שתי אפשרויות להחליט באיזו אות לבחור (יש 10 אותיות) והתשובה נובעת מעיקרון הכפל.

❖ **שאלה:**

כמה מילים יש באורך 10 שמורכבות מהאותיות א ו-ב כך שיש לפחות חזרה 1 של כל אות.

➢ פתרון: $2^{10}-2$. מורידים את 2 האופציות שלא עומדות בתנאי (2 המילים המורכבות רק מאות אחת).

❖ **שאלה:**

נתונה קבוצה של n אנשים. בכמה דרכים ניתן לבחור מהקבוצה וועד של k חברים שונים כך שלכל אחד מהם תפקיד שונה?

➢ פתרון: $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$

❖ **שאלה:**

כעת נניח שבוועד, אין תפקידים, כלומר הסדר לא חשוב.

➢ פתרון: בכל המקרים נרצה לבחור k אלמנטים מתוך n אלמנטים.

	עם החזרה	בלי החזרה
עם חשיבות לסדר	n^k	$\binom{n}{k}k! = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
בלי חשיבות לסדר		$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

למה יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחור k אלמנטים ללא החזרה ובלי חשיבות לסדר? יש לי n איברים, אני אסדר אותם בשורה, לכך יש $n!$ אפשרויות. אני אגיד, שאלה שאני בוחר הם k האיברים השמאליים. אני יכול לערב את k האיברים השמאליים מבלי לשנות את הבחירה, ואני יכול לערבב את $n-k$ הימניים מבלי לשנות את הבחירה, ובסה"כ: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

קבוצת חזקה: קבוצת החזקה של קבוצה A, היא אוסף של כל הקבוצות החלקיות של A שהיא $2^{|A|}$. מעקרון הכפל, לכל מספר (איבר) יש שתי אפשרויות להחליט להכניס אותו או לא.

עוצמה של קבוצה: זהו הגודל של קבוצה, מסומן ב- | |. לדוגמא: $A=\{1,3,7,5,9\}, |A|=5$.

זהויות

1. צריך להוכיח: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

הוכחה אלגברית:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!}$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

וקיבלנו שוויון.

הוכחה קומבינטורית:

- אגף ימין: נבחר את $n-k$ התלמידים שלא יצאו לטיול ו-k התלמידים שנותרו ייצאו לטיול.
- אגף שמאל: נבחר את k התלמידים שכן יצאו לטיול.

בסה"כ ספרנו בשתי האגפים את אותו הדבר.

2. צריך להוכיח: $n\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}k$

הוכחה אלגברית:

$$n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k}k=\frac{n!}{k!\,(n-1)!}\cdot k=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

וקיבלנו שוויון.

הוכחה קומבינטורית:

נרצה לענות את השאלה מה מספר האפשרויות להרכבת וועדה של k ומתוכם בחירת יושב ראש.

- אגף שמאל: נבחר מתוך n האנשים יושב ראש, לכך n אפשרויות ומתוך $n-1$ הנותרים לבחור $k-1$ חברים.
- אגף ימין: נבחר את k החברים קודם, לשם כך יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות ומתוכם נבחר יושב ראש, לכך יש k אפשרויות.

3. צריך להוכיח: $n \cdot 2^{n-1} = \Sigma_{(k=1)}^{n} \binom{n}{k} \cdot k$

הוכחה קומבינטורית:

שני האגפים מתארים את ספירת מספר הוועדים מתוך קבוצה בגודל n כך שבוועד יש יושב ראש ואולי עוד חברים במספר כלשהו.

- אגף שמאל: יש n אפשרויות לבחירת יושב הראש, ולגבי שאר האנשים לכל בנאדם יש שני אפשרויות להיכנס או לא ועל פי עקרון הכפל: $n \cdot 2^{n-1}$.
- אגף ימין: נבחר איזושהי קבוצה של אנשים שיהיו בוועד, בתת קבוצה חייב להיות לפחות 1 (יושב ראש אחד) ומהקבוצה הנבחרת יש לבחור יושב ראש, לכך k אפשרויות.

4. צריך להוכיח: $\Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

הוכחה קומבינטורית:

יש n בנים ו-n בנות ורוצים לבחור ועד של n חברים.

- אגף ימין: בוחרים n חברים מתוך $2n$ בנים ובנות.
- אגף שמאל: $\Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. הסיגמא מתארת את מספר האפשרויות לבחור בוועד כאשר מחלקים למקרים, אם יש k בנים אז יש $n-k$ בנות.

- ❖ **שאלה:** בכמה סידורים אפשר לסדר בספסל 3 בנות? $n! = 3! \Leftarrow$
- ❖ **שאלה**: בכמה אפשרויות אפשר לסדר אותן במעגל? $(n-1)! = 2! \Leftarrow$