18.1.15

הסתברות - שיעור 13.

<u>סוגיה</u>

מגרילים מספר לפי התפלגות ידועה. אני צריך לנחש מהו המספר שיצא. אני משלם קנס לפי כמה שאני טועה. מה כדאי לי לנחש?

פיתרון:

א. אם כל טעות שטעיתי, אשלם כסף ש"ח.
כדאי לי לנחש את השכיח - מי שמתקבל בהסתברות הגבוהה ביותר. אם יש כמה שכיחים אז כדאי לי לבחור ביניהם מה ?.

ב. נניח שאני אשלם קנס ששווה לריבוע הטעות שלי. למשל אם ניחשתי 3 ויצא 1 אז אשלם $2^2=4$
מה כדאי לי לבחור?

תשובה:

כדאי לי לנחש את התוחלת.

הוכחה:

התוחלת היא μ. המשתנה הוא X. נניח שאני בוחר מספר a. נראה שהכי טוב לבחור ב $a=\mu$. תוחלת הקנס שלי היא $E((a-x)^2)$

$$E((a-x)^2)=E((a-\mu)+(\mu-x))^2$$

$$E((a-\mu)^2+(x-\mu)^2+2(a-\mu)(\cancel{x-\mu}\ \mu-x))=$$

$$=(a-\mu)^2+V(x)+E(2(a-\mu)(\mu-x))=$$

הוצאנו הנ"ל קבוע לכן לא
מתוחלת משתנה.

$$=(a-\mu)^2+V(x)+\cancel{2(a-\mu)\cdot E(\mu-x)}=V(x)+(a-\mu)^2$$

כך מתקבל ערך מינימלי כאשר $a=\mu$. ולכן תוחלת הקנס המינימלית היא $V(X)$.

18.1.15

לדוגמא:

X משתנה $Bin(8, \frac{1}{2})$

אז $E(X)=8\cdot\frac{1}{2}=4$, $V(X)=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=2$.

ובכן לצפות את הערך 4 והקנס המאוזר יהיה 2.

א' שוויון מרקוב

שאלות למוטיבציה.

יהי X משתנה מקרי.

האם יתכן ש $E(X)=10$ ו $P(X=100)=0.5$?

התשובה היא שכן. נגדיר $P(X=100)=P(X=-80)=0.5$

ואז $E(X)=10$

עכשיו נשנה את השאלה.

האם יתכן ש $E(X)=10$, $P(X=100)=0.5$ ו $P(X\geq 0)=1$

כלומר שהמשתנה הוא אי שלילי.

האינטואיציה היא שזה לא יתכן כי אם $P(X=100)=0.5$

אז יש לנו כבר תרומה של $100\cdot\frac{1}{2}=50$ לתוחלת ואין

מה שיוריד אותו - שלילי. זה צודק מבחינה כמותית.

א' שוויון מרקוב

יהי X משתנה מקרי המקיים $P(X\geq 0)=1$ אז לכל

כל הפור $a>0$ מתקיים

$$P(X\geq a)\leq \frac{E(X)}{a}$$

השיקול בהוכחה הוא כמותי כמו בדוגמא שנתנו.

הוכחה:

נניח בשלילה ש $P(X\geq a)>\frac{E(X)}{a}$

$$E(X)=\sum_{k\geq 0}P(X=k)\cdot k=\sum_{a>k\geq 0}P(X=k)\cdot k+\sum_{k\geq a}P(X=k)\cdot k$$

כי המשתנה אי שלילי

$$\geq \sum_{a>k\geq 0}P(X=k)\cdot 0+\sum_{k\geq a}P(X=k)\cdot a=0+a\sum_{k\geq a}P(X=k)$$

$$E(X)\geq a\sum_{k\geq a}P(X=k)\rightarrow E(X)\geq a\cdot P(X\geq a)$$

18.1.15

נוכיח $P(X\geq a)\leq \frac{E(X)}{a}$

למעשה הראנו שהנחה ש $P(X\geq a) > \frac{E(X)}{a}$

לא תתכן.

שאלה:

$X\sim Bin(9,\frac{1}{3})$ הוכיחו ש $P(X\geq 4)\leq \frac{3}{4}$

פיתרון:

$E(X)=9\cdot\frac{1}{3}=3$

$$P(X\geq 4)\leq \frac{E(X)}{4}=\frac{3}{4}$$

נחזור לבעיית המזכירה הרשלנית.

n מעטפות ו n אנשים. X - מספר האנשים שמקבלים מכתב מתאים.

מצאו חסם עליון על $P(X\geq 2)$

פיתרון $P(X\geq 2)\leq \frac{E(X)}{2}=\frac{1}{2}$

מצאו חסם עליון על $P(X\geq n-1)$

נסה קודם לפי אי שוויון מרקוב

$P(X\geq n-1)\leq \frac{E(X)}{n-1}=\frac{1}{n-1}$, $E(X)=1$

נראה שאי שוויון מרקוב לא תמיד נותן אינפורמציה אופטימלית

$$P(X\geq n-1)=\underbrace{P(X=n-1)}_{=0}+\underbrace{P(X=n)}_{\frac{1}{n!}}$$

לא יתכן נגיד ש 99 אנשים מתוך 100 יקבלו את המכתב הנכון, האחרון גם חייב לקבל נכון, לכן זה אפס.

לא יתכן שבדיוק n-1 אנשים יקבלו מכתב נכון.

אם n-1 אנשים מקבלים נכון אז גם הנוסף מקבל נכון.

לכן קיבלנו $P(X\geq n-1)=\frac{1}{n!}$. וזה הרבה יותר טוב מאשר

מה שקיבלנו באמצעות מרקוב. זה מראה שמרקוב

זה רק חסם.

<u>שאלה</u>

יש בניין שבו 500 צרכנים. בכל שלב אחד זורק קוביה
הוגנת ומוסיף מספר צרכנים שנשאר לתוצאת הקוביה. תן
חסם עליון על הסיכוי שבסוף 100 סבבים יגיע להבה הבניין.
(באמצעות אי שוויון מרקוב).

יהי X סכום 100 ההטלות.

כדי שיגיע להבה הבניין צריך להתקיים $(X \geq 500)$

$X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ כאשר X_i תוצאת הטלה ה-i.

$$E(X) = E\left(\sum X_i\right) = 100 \cdot \frac{1+6}{2} = 350$$

$$P(X \geq 500) \leq \frac{350}{500}$$

זהו חסם של אי שוויון מרקוב.

18.1.15

פונקצית התפלגות מצטברת

לכל משתנה X נגדיר $F_X(x)$ ההסתברות שהמשתנה X יקבל ערך לא יותר גדול מ־ x.

$$F_X(x)=P(X\le x)$$

הפונקציה הזאת מוגדרת לכל $-\infty<x<\infty$

דוגמא ראשונה:

X משתנה מנוון. $P(X=6)=1$

במקרה כזה:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<6\\ 1 & x\ge 6\end{cases}$$

לדוגמא:

$P(X\le 3)=0$ $\quad$ $P(X\le -8)=0$

$P(X\le 6)=1$ $\quad$ $P(X\le 9)=1$

דוגמא שנייה:

הטלת קוביה: תהיה

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{6} & 1\le x<2\\ \frac{2}{6} & 2\le x<3\\ \frac{3}{6} & 3\le x<4\\ \frac{4}{6} & 4\le x<6\\ \frac{5}{6} & 5\le x<6\\ 1 & 6\le x\end{cases}$$

18.1.15

דוגמא נוספת:

X - תוצאת הטלת קוביה הוגנת

Y - תוצאת הטלת קוביה הוגנת. X ו Y ב"ת.

$$Z = \max\{X, Y\}$$

מצאו את $F_Z(z)$ $\quad F_Z(z) = P(Z \le z)$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 1 \\ \left(\frac{1}{6}\right)^2 & 1 \le z < 2 \\ \left(\frac{2}{6}\right)^2 & 2 \le z < 3 \\ \left(\frac{3}{6}\right)^2 & 3 \le z < 4 \\ \left(\frac{4}{6}\right)^2 & 4 \le z < 5 \\ \left(\frac{5}{6}\right)^2 & 5 \le z < 6 \\ 1 & 6 \le z \end{cases}$$

אזי

$$\lim_{z \to -\infty} F_Z(z) = 0$$

$$\lim_{z \to +\infty} F_Z(z) = 1$$

14.1.15

חידת המטמון

חידה:

מאחורי אחת משלושת החלונות רואה יש מטמון.
אני בוחרת באחד משלושת החלונות ומישהו התוכנית מציג
רק שהוא פתח חלון שמאחוריו אין מטמון ושם נותרה לפתוח חלון
שאין מאחוריו מטמון. כעת אני יכולה לשנות את בחירתי: האם כדאי
לי לשנות את בחירתי? ___ כדאי. ___

1
תשובה

יהי A - המאורע שהמטמון נמצא מאחורי החלון שלא
פתח ושלא בחרתי.
יהי B - המאורע שהוא פתח את החלון האמצעי.
(שהוא נמצא באחד מהחלון שהוא פתח
את האמצעי).

$P(A|B)$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})}$$

$\bar{A}$ - המאורע שהמטמון מאחורי מה שבחרתי.

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

הסתברות שהמציג יפתח חלון שבו אין מטמון הוא אחד
כי זה מה שקורה, ומאחורי שתי האפשרויות רק אחת
מתאימה לכן 1.
אם יוצבו לחלון האמצעי יהיו סיכויי שווים ל $\frac{1}{2}$.
אם המציג פתח את החלון האמצעי וכו' לא מחליף הימנית
הוא עם המטמון צפוי יותר.
ניסוח מדויק יותר:

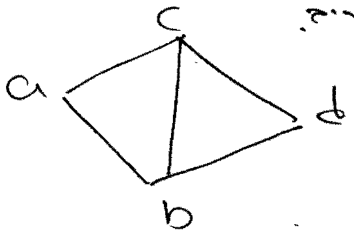
$$P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(C)\cdot P(C|A)+P(D)\cdot P(D|A)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

סוגיה:

נתונה מערכת חוטים המחברים בין נקודות יש 5 קווים.

כל קו עובד בסיכוי p באופן ב"ת בקווים אחרים.



א. איך מתפלג מספר הקווים התקינים?

תשובה:

$Bin(5,p)$

ב. מהי תוחלת מספר הקווים התקינים.

תשובה: $5p$.

זו לפי התוחלת של משתנה בינומי, או לפי תוחלת סכום של אינדיקטורים. כל אינדיקטור הוא הצלחה בסיכוי p.

ג. מהי ההסתברות שיש קשר תקין בין a לבין d?

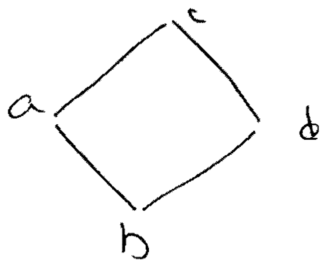
נחלק לשני מקרים. מקרה ראשון ש bc לא עובד. ומקרה שני שbc עובד.

הסתברות המקרה השני הוא p.

$P(\text{יש קשר בין } a \text{ ל-} d) = (1-p)\,P(\text{יש קשר בלי הכללת } bc) + p\,P(\text{יש קשר שאולי משתמש } bc?)$

$\underbrace{P(bc \text{ לא תקין})}_{=1-p} \cdot \underbrace{P(\text{יש קשר} \mid bc \text{ לא תקין})}_{2p^2-p^4} + \underbrace{P(bc \text{ תקין})}_{=p} \cdot P(\text{יש קשר} \mid bc \text{ תקין})$

בהינתן שbc לא תקין, מה הסיכוי שיש קשר?



יש קשר דרך b בסיכוי p^2 ויש קשר דרך c בסיכוי p^2.

אבל לשם חישוב הסתברות האיחוד, צריך להוריד את החיתוך.

לכן נקבל $2p^2-p^4$.

עכשיו נטפל במקרה ש bc תקין

צריך להגיע לשכבת האמצע ומשכבת

האמצע להגיע הלאה.

הסיכוי שנגיע לשכבת האמצע הוא $2p-p^2$

18.1.15

הסיכוי להגיע מסכבת כשהצד ימנית הוא גם $2p-p^2$.

בהנחה
לכן זה ~~...~~ הסיכוי להגיע מ-a ל-b. הוא $(2p-p^2)(2p-p^2)$

הוא שווה ל $(2p-p^2)^2$.

לסיכום הסיכוי שיש קשר בין a ל-b הוא

$$(1-p)\left[2p^2-p^4\right]+p\left[(2p-p^2)^2\right]$$

לגבי מקדם מתאם:

יהי X משתנה מקרי.

$y=x^2$ משתנה מקרי.

האם שתי מקדם המתאם בין x ל-y שווה ל-1?

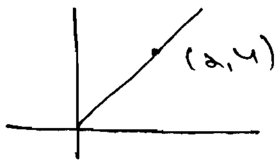
כמובן שלא: אין קשר לינארי. x^2 היא לא פונקציה לינארית. לכן נצפה שהמתאם לא יהיה ±1.

הדוגמה היחידה שמקדם המתאם יהיה +1 היא ש-X מקבל רק שני ערכים אפשריים.

בין שני ~~...~~ נקודות, יכול להיות שעובר קו ישר, ואז זה קו לינארי:

$P(X=0)=P(X=2)=0.5$

$P(X^2=0)=P(X^2=4)=0.5$



יש קשר לינארי בין שתי הנקודות (0,0) ו-(2,4)

$y=2x$ ולכן יש מתאם של +1. יש קשר לינארי מלא.

18.1.15

שאלה:

אני יכול לבצע כמה שאני רוצה הטלות ב"ת של מטבע שנותן

התפלגות p לעץ: p ידוע.

איך אוכל ליצור מטבע בעל משתנה אינדיקטורי עם התפלגות

חצי?

הפתרון:

אני אטיל סדרה של זוגות של הטלות, עד שבאחד מהם אקבל שתי

תוצאות שונות.

בכל זוג הטלות יש לי סיכוי של $2p(1-p)$ לקבל תוצאות

שונות.

הסיכוי שב n זוגות של הטלות אני עוד לא אקבל תוצאות שונות

$$\left(\underbrace{p^2}_{\text{פעמיים עץ}} \text{ או } \underbrace{(1-p)^2}_{\text{פעמיים פלי}}\right)^n$$

ההסתברות הזאת שואפת לאפס כאשר $n \to \infty$ ולכן ההסתברות שאף

פעם לא אקבל זוג שונות היא אפס.

ברגע שאני מקבל תוצאות שונות אז הסיכוי שהראשון עץ והשני

הוא פלי: אותו דבר כמו להיפך ולכן הסיכוי הוא $\frac{1}{2}$.

מכאן לזוג של שונים אז אם הראשון בזוג הוא עץ והשני פלי

זה יחשב כהצלחה. קיבלנו משתנה אינדיקטורי עם סיכוי $\frac{1}{2}$.

אם אני רוצה להשיג אינדיקטור בעל התפלגות שליש אז אטיל

שלשות ואם בשלשה הראשונה שבהן יש תוצאות שונות הראשון

הוא השונה זה יחשב כהצלחה.