28.12.14

הסתברות - שיעור עשירי

חישוב תוחלת של משתנה $G(p)$

$$E(x)=\sum_{x=1}^{\infty}p\cdot q^{x-1}\cdot x \qquad X\sim G(p)$$

נחשב בעזרת נוסחת הזנב לחישוב תוחלת
משתנה גאומטרי עם p מקבל רק ערכים שלמים אי שליליים.

לכן ניתן להשתמש בנוסחת הזנב.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}$$

אם $X\sim NB(n,p)$ אז הוא סכום של n משתנים $G(p)$.
תוחלת סכום התוחלות. לכן $E(x)=\frac{n}{p}$.

סוגיה:

100 אנשים משתתפים בהגרלה. כל אחד משלם עבור השתתפותו שקל אחד ובוחר מספר בין 1 - 100. החברה המארגנת מגרילה מספר בין 1 ל- 100. מי שבחר מספר זה זוכה בקופה ששולמה לחברה. אם יותר מאחד בחרו במספר אז הם מתחלקים בקופה. אם אף אחד לא בחר אז הקופה בידי החברה.
המשחק לא היה רווחי לחברה רק אם המשתתפים היו מתואמים ובוחרים כל אחד מספר אחר.
מה תוחלת הרווח של החברה?

$$100\left[1-\frac{1}{100}\right]^{100}\approx 100\cdot\frac{1}{e}$$

ההסתברות שאף אחד לא בחר במספר הנכון.

כי. גודל הקופה כפול ההסתברות שאף אחד לא יבחר במספר הנכון.

28.12.14

תוחלת מותנית

מהו $E(X|A)$ כאשר A הוא מאורע.

דוגמא:

יהי X משתנה של קוביה הוגנת.

מהו $E(X)$? $\frac{1+6}{2} = 3.5$

שאלה:

מהו $E(X|X\le 4)$?

$$P(X=1|X\le 4) = \frac{P(X=1, X\le 4)}{P(X\le 4)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2|X\le 4) = \frac{P(X=2, X\le 4)}{P(X\le 4)} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3, X\le 4) = P(X=4, X\le 4) = \frac{1}{4}$$

$$E(X|X\le 4) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 4 = 2.5$$

$$E(X|X\le 4) = \sum (X=x|X\le 4)\cdot x = 2.5$$

שאלה:

X - תוצאת קוביה הוגנת

Y - תוצאת קוביה הוגנת

X,Y ב"ת

$Z=X+Y$

מהו $E(X|Z=5)$?

$$P(X=1|Z=5) = \frac{P(X=1, Y=4)}{P(Z=5)}$$

$$= \frac{P(X=1,Y=4)}{P(X=1,Y=4)+P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=2)+P(X=4,Y=1)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2|Z=5) = P(X=3|Z=5) = P(X=4,Z=5) = \frac{1}{4}$$

$$E(X|Z=5) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 4 = 2.5$$

28.12.14

תוחלת שלמה:

שאלה:

יש מטבע שנותן "עץ" בסיכוי $\frac{1}{3}$ ומטבע אחר שנותן "עץ" בסיכוי $\frac{1}{9}$. אני בוחר בסיכוי שווה. אם לבצע 6 הטלות בראשון או 9 הטלות בשני. מהי תוחלת מספר העצים שמתקבל.

יהי A_1 בחרתי במטבע הראשון. יהי A_2 בחרתי במטבע השני.

$$E(X) = P(A_1)\cdot E(X|A_1) + P(A_2)\cdot E(X|A_2)$$

(A_1 ו-A_2 הם זרים ומכסים את כל האפשרויות).

$$E(X|A_1) = 6\cdot\frac{1}{3} = 2 \qquad E(X|A_2) = 9\cdot\frac{1}{9} = 1$$

$$E(X) = 0.5\cdot 2 + 0.5\cdot 1 = 1.5$$

באופן כללי, אם X,Y הם זוג משתנים אז

$$E(X) = E(E(X|Y)) = E(E(Y=y))$$

בדוגמה הזאת ($Y=1$) אם בחרתי במטבע הראשון ו-$Y=2$ אם בחרתי במטבע השני.

$E(X|Y=1)=2$ $\quad$ $E(X|Y=2)=1$ ושקלול בין האפשרויות בסיכוי של חצי קיבלנו $E(X|Y=1)$ ובסיכוי חצי קיבלנו $E(X|Y=2)$. אנחנו עוברים על כל ערך של y ועושים תוחלת על פני כל התוחלות האלה.

28.10.14

שאלה:

יש מטבע שנותן "עץ" בסיכוי $\frac{1}{2}$ ויש מטבע שנותן "עץ" בסיכוי $\frac{1}{4}$. אני בוחרת בסיכוי שווה באחד מהם ומטילה בו סדרת הטלות.

מהי תוחלת מספר העצים ב-4 הטלות?

$$0.5\cdot 4\cdot 0.5 + 0.5\cdot 4\cdot 0.25=1.5$$

מהי תוחלת מספר העצים בהטלות 2,3,4.

$$0.5\cdot 3\cdot \tfrac{1}{2}+0.5\cdot 3\cdot \tfrac{1}{4}$$

כעת נניח שבהטלה הראשונה קיבלנו "עץ" מהי תוחלת מספר העצים בשלושת ההטלות הבאות.

יהי Y אינדיקטור לכך שנבחר המטבע הראשון.

X מספר תוצאות העץ בשלושת ההטלות 2,3,4.

$$E(X\mid Y=1) = 3\cdot 0.5=1.5$$
$$E(X\mid Y=0) = 3\cdot 0.25=\tfrac{3}{4}$$

מה הסיכוי שיש לי את המטבע הראשון בהינתן שקיבלתי עץ בהטלה הראשונה?

$$\frac{0.5\cdot\frac{1}{2}}{0.5\cdot\frac{1}{2}+0.5\cdot\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

$$E(X)=E(E(X\mid Y))=\tfrac{2}{3}E(X\mid Y=1)+\tfrac{1}{3}E(X\mid Y=0)=\tfrac{2}{3}\cdot 1.5+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}$$

28.12.14

תוחלת של טרנספורמציה של משתנה:

יהי X - משתנה מקרי של קוביה תקינה.

מהו $E(X^3)$?

$$E(X^3)=\frac{1}{6}\cdot 1^3+\frac{1}{6}\cdot 2^3+\frac{1}{6}\cdot 3^3+\frac{1}{6}\cdot 4^3+\frac{1}{6}\cdot 5^3+\frac{1}{6}\cdot 6^3$$

באופן כללי: $E(f(x))=\sum P(X=k)\cdot f(k)$

במקרה שלנו f היא העלאה בשלישית

התוחלת נותנת מושג על ערך מרכזי של ההתפלגות (שקלול).

עכשיו נרצה ללמוד על הפיזור של המשתנה.

נעשה מספר נסיונות שחלקם לא מוצלחים.

ההצעה הראשונה תהיה לקחת את תוחלת המרחק מהתוחלת.

למשל בקוביה זה

$$\frac{1}{6}(1-3.5)+\frac{1}{6}(2-3.5)+\frac{1}{6}(3-3.5)+\frac{1}{6}(4-3.5)+\frac{1}{6}(5-3.5)+\frac{1}{6}(6-3.5)$$

$=0$

אבל ראינו זה נופל כי תמיד זה שווה ל-0.

__תמיד!__ $E(X-\underbrace{E(x)}_{\text{קבוע}})=E(x)-E(x)=0$

$E(b-x)=b-E(x)$

לינאריות התוחלת: $E(ax+b)=a\cdot E(x)+b$

תיקון שלב זה יהיה לקחת את הערכים המוחלטים של הפרש.

28.12.14

הרעיון שמאחורי זה הוא התוחלת בריבוע של הסטיות

$$E[(X-E(x))^2]$$

כך כל סטייה נחשבת חיובית ונספרות רק סטיות חיוביות.

הגדרת השונות של X מוגדרת:

$$Var(x)=E[(x-E(x))^2]$$

מסמנים אותה: $Var(x)$ או $V(x)$.

סימנים: נוהגים גם לסמן: μ את התוחלת או μ_X

נוהגים גם לסמן את $Var(x)$: σ^2 או: σ^2_x

משתנה מנוון הוא משתנה שמקבל ערך קבוע. מצופה שלמשתנה זה השונות היא אפס. לכל משתנה אחר יש שונות חיובית ממש כי הוא מקבל סטיות מהתוחלת.

X - משתנה מנוון.

$$P(x=a)=1$$

למה שווה $E(x)$? $E(x)=a$

$$E(x)=P(x=a)\cdot a=a$$

$$Var(x)=0$$

$$E((x-a)^2)=\overset{\text{סטייה}}{0}\cdot\overset{\text{הסיכוי}}{1}=0$$

x תמיד שווה ל-a.

מקבל סטייה של 0 בסיכוי 1.

נחשב שונות של x כאשר x מתפלג אחיד $[1,6]$ (קוביה הוגנת).

$$E(X)=3.5$$

* ממוצע ריבוע הסטייה מהתוחלת.

$$Var(x)=\frac{1}{6}\cdot(1-3.5)^2+\frac{1}{6}(2-3.5)^2+\frac{1}{6}(3-3.5)^2+\frac{1}{6}(4-3.5)^2$$
$$+\frac{1}{6}(5-3.5)^2+\frac{1}{6}(6-3.5)^2=$$

28.12.14

נוסחה נוספת לחישוב שונות:

$$V(x)=E(x^2)-E^2(x)$$

נוכיח את נכונות הנוסחה:

$$V(x)=E\left((X-E(x))^2\right)=E\left(x^2-2E(x)\cdot X+E^2(x)\right)=$$
$$=E(x^2)-E(2E(x)\cdot x)+E^2(x)=$$
$$=E(x^2)-2E(x)\cdot E(x)+E^2(x)=E(x^2)-2E^2(x)+E^2(x)$$
$$=E(x^2)-E^2(x)$$

מהי השונות של משתנה $X\sim U[1,6]$ ראינו כבר מהי. פתרון

נחשב לפי הנוסחה:

$$V(x)=E(x^2)-E^2(x)=\left[\tfrac{1}{6}\cdot 1^2+\tfrac{1}{6}\cdot 2^2+\tfrac{1}{6}\cdot 3^2+\tfrac{1}{6}\cdot 4^2+\tfrac{1}{6}\cdot 5^2+\tfrac{1}{6}\cdot 6^2\right]-3.5^2$$
$$=\boxed{\frac{35}{12}}$$

באופן כללי לגבי משתנה $X\sim U(a,b)$ מתקיים:

$$V(x)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

נראה שימוש בזה

עבור $X\sim U[1,6]$

$$Var(x)=\frac{(6-1+1)^2-1}{12}=\frac{35}{12}$$

$a=1 \quad b=6$

התוחלת היא הממוצע התיאורטי על פני התפלגות. מה צפוי לנו לאורך זמן כשניגשים למשתנה מסויים.

הממוצע הרגיל הוא הממוצע על סדרת נסיונות. ברור שבמספר קטן של נסיונות אפשר להיות רחוקים מהתוחלת. ככל שנעשה יותר נסיונות (נצפה להיות קרובים יותר לתוחלת.

28.12.14

השונות היא מדד לסטיות מהתוחלת. שונות גדולה יותר מראה על כך שנקבל ריבועי סטייה יותר גדולים מהתוחלת.

שונות של משתנה פואסוני:

$$X \sim P(\lambda)$$

מחושב לפי הנוסחה: $E(X^2)-E^2(X)$

$$E(X)=\lambda$$

$$E^2(X)=\lambda^2$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)\cdot k^2=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot k^2=$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot k(k-1)\right]+\left[\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot k\right]=$$

$$=\left[\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{(k-2)!}\right]+\lambda=\left[\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\right]+\lambda=$$

$$=\left[\lambda^2\cdot\sum_{i=0}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}\right]+\lambda=\lambda^2\cdot1+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

בתוך ה- Σ רשום בסכום ההסתברויות של משתנה $P(\lambda)$

לכן ה- Σ מתכנס ל- 1.

קיבלנו: $E(X^2)=\lambda^2+\lambda$

קודם לכן: $E^2(X)=\lambda^2$

לכן לפי הנוסחה: $V(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

28.12.14

חישוב תוחלת ושונות של משתנה גאומטרי $G(p)$:

למשתנה $G(p)$ יש תכונת חוסר הזיכרון.

אם נכשלתי a פעמים, אז מספר הניסיונות שנותרו מתפלג כמו מספר הניסיונות מראש.

נתחיל בתוחלת $E(x)=p\cdot 1+q(E(x+1))$

זה נובע מהתפלגות גאומטרית. אם נכשלתי אז מספר הניסיונות הנותר מתנהג כמו x.

$$E(x)=p+q\cdot E(x)+q$$

$$E(x)=1+q\cdot E(x) \qquad E(x)-qE(x)=pE(x)$$

$$pE(x)=1$$

$$\boxed{E(x)=\frac{1}{p}}$$

לינאריות התוחלת: $E(x+1)=E(x)+1$

שונות של משתנה $x\sim G(p)$

$$V(x)=E(x^2)-E^2(x)$$

$$E^2(x)=\left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$E(x^2)=p\cdot 1^2+q\cdot E((1+x)^2)$$

$$E(x^2)=p+qE(1+2x+x^2)=p+q+2q\cdot E(x)+qE(x^2)$$

$$=1+\frac{2q}{p}+qE(x^2)$$

$$E(x^2)=1+\frac{2q}{p}+qE(x^2)$$

$$p\cdot E(x^2)=1+\frac{2q}{p}$$

$$E(x^2)=\frac{1+\frac{2q}{p}}{p}=\frac{p+2q}{p^2}=\frac{1+q}{p^2}$$

$$V(x)=E(x^2)-E^2(x)=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

$$V(x)=\frac{q}{p^2}$$

גל

28.12.14

דוגמא:

אני אוכל סוכריות עד שאני מוציא אחת עם ריבה. בכל שלב יש לי סיכוי הצלחה של $\frac{1}{3}$.

X - מספר הנסיונות.

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$$V(X) = \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 6$$

זה נכבים על הכינור.

שונות של טרנספורמציה לינארית של משתנה:

$$V(aX+b) = V(aX)$$

$$V(aX) = E((aX)^2) - E^2(aX) = a^2 \cdot E(X^2) - a^2 E^2(X)$$

$$= a^2\left[E(X^2) - E^2(X)\right] = a^2 V(X)$$

לכן, $V(aX+b) = a^2 V(X)$

שאלה:

נבחן מנחש סט שאלות לכל אחת יש לו הסתברות $\frac{1}{4}$ לקבל נכונה.

על כל תשובה נכונה הוא מקבל 5 נקודות.

יהי X מספר התשובות הנכונות

יהי Y מספר הנקודות

$$Y = 5X$$

$$V(Y) = 5^2 V(X)$$