7.12.14

מבוא להסתברות - שיעור שביעי

דוגמאות להתפלגות דו מימדית.

אני בוחרת בסיכוי שווה בין מטבע הוגן וקוביה תקינה ומטילה את ~~העצם~~ הנבחר פעם אחת.

יהי X - אינדיקטור לקבלת קוביה (X=0) אם התקבל מטבע

! (X=1) אם התקבלה קוביה. על המטבע רשומים 1,0

על הקוביה 1,2,3,4,5,6.

יהי Y התוצאה של ההטלה. מצאו את ההתפלגות המשותפת (X,Y).

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	P_X
0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
P_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	

דוגמא נוספת:

זורקים כדורים לתאים.

זורקים שלושה כדורים לשלושה תאים. כל כדור יכול להיכנס לכל תא בסיכוי שווה באופן בלתי תלוי בכדורים האחרים.

X מספר הכדורים בתא מספר 1.

Y מספר התאים שבהם יש לפחות כדור 1.

מצאו את ההתפלגות המשותפת של X,Y

$X \sim Bin(3,\frac{1}{3})$ זו פונקציית ההסתברות של X.

X \ Y	1	2	3	P_X
0	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{6}{3^3}$	0	$\frac{8}{27}$
1	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{3!}{3^3}$	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{\binom{3}{2}\cdot 2}{3^3}$	0	$\frac{6}{27}$
3	$\frac{1}{3^3}$	0	0	$\frac{1}{27}$
P_Y	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

$\frac{3!}{3^3}$ כדור אחד בתא וצריך לתת יחס לסדר.

$P(X=0, Y=2)$

או

$= \frac{\binom{3}{1}}{3^3} + \frac{\binom{3}{1}}{3^3}$

בוחרים את הכדור שיהיה לבד.

$? = P(X=1, Y=2)$

$$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{3^3}$$

$\binom{3}{1}$ בחירת הכדור לתא הראשון.

$\binom{2}{1}$ בחירת התא שאליו יכנסו שני הכדורים הנותרים.

$P(X=2, Y=2)$ $\quad \frac{\binom{3}{2}\cdot 2}{3^3}$ בחירת שני הכדורים. ואז נשארו שני תאים. לכן כפול 2.

<u>דוגמא:</u> <u>התפלגות סכום של משתנים מקריים.</u>

יהיו X ו Y שני משתנים מקריים

יהי $Z=X+Y$. איך מתפלג Z? איך נוכל לחשב את התפלגותו.

$$P(Z=z)=\sum P(X=x, Y=z-x)$$

על פני כל הערכים האפשריים.

אם X ו Y הם משתנים ב"ת אז ניתן לכתוב שזה שווה ל $\sum P(X=x)\cdot P(Y=z-x)$ על פני כל הערכים האפשריים.

זה רק אם הם ב"ת.

דוגמא:

X ו Y הם הטלות ב"ת של קוביה תקינה.

Z סכום ההטלות.

דוגמא למקרים בקצוות:

$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{36}$

$P(Z=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)$

$=P(X=1)\cdot P(Y=2)+P(X=2)\cdot P(Y=1)=\frac{2}{36}$

$P(Z=12) = \frac{1}{36}$

$P(Z=11) = P(X=5)\cdot P(X=6) + P(X=6)\cdot P(X=5) = \frac{2}{36}$

$P(\cancel{X}Z=7) = P(X=1)\cdot P(\cancel{Y}=6) + P(X=2)\cdot P(Y=5) + \ldots + P(X=6)\cdot P(Y=1)$
$= \frac{6}{36}$

$P(Z=6) = \frac{5}{36}$

כדי לתאור את ההתפלגות ניתן לרשום רשימה.
אך ניתן לרשום רישום יותר אלגנטי.

$P(Z=z) = \frac{6-|z-7|}{36}$

ככל שמתרחקים מ-7 הסיכוי קטן ב-1.

התפלגות סכום של משתנים בינומיים:

דוג׳:

אם $X\sim Bin(n,p)$ ו-$Y\sim Bin(m,p)$ והם ב"ת אז

נגדיר $Z=X+Y$, ואפשר לראות ש: $Z\sim Bin(m+n,p)$

כי יש n הטלות של מטבע עם סיכוי p ועוד m הטלות כאלה שכולן ב"ת אז סך הכל יש $n+m$ נסיונות ב"ת.

$$P(Z=z)=\sum P(X=x,Y=z-x)\underset{\text{כי הם ב"ת}}{\downarrow}=\sum_{x=z-m}^{n} P(X=x)\cdot P(Y=z-x)$$

$$=\sum\binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x}\cdot\binom{m}{z-x}\cdot(1-p)^{m-(z-x)}$$

$$=\sum\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}\cdot p^z\cdot(1-p)^{n+m-z}$$

$$=p^z\cdot(1-p)^{n+m-z}\cdot\sum\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}=\binom{n+m}{z}\cdot p^z\cdot(1-p)^{n+m-z}$$

מה שכתוב ב-$\sum$ זה מספר האפשרויות לבחור z ילדים מתוך n בנים ו-m בנות על פי חלוקה לפי מספר הבנים שאני בוחר.

קיבלנו שאם X ו-Y ב"ת מתפלגים

$X\sim Bin(n,p)$ $Y\sim Bin(m,p)$ אז

$Y+X\sim Bin(n+m,p)$

משתנים תלויים זה שונה.

פרשנו:

מטילים 4 מטבעות הטלות ב״ת בעלות סיכוי p להצלחה.

X - מספר ההצלחות בשתי ההטלות הראשונות

Y - מספר ההצלחות ב-4 ההטלות.

איך מתפלג X? תשובה: Bin(2, p)

איך מתפלג Y? תשובה: Bin(4, p)

מצאו את ההתפלגות המשותפת של (X,Y).

X \ Y	0	1	2	3	4	P_X
0	$(1-p)^4$			0	0	
1	0					
2	0	0		p^4		
P_Y						

$$P(X=0, Y=1) = (1-p)^2 \binom{2}{1} \cdot p(1-p)$$

$$P(X=0, Y=2) = (1-p)^2 \cdot p^2 \qquad P(X=2, Y=3) = p^2 \binom{2}{1} \cdot p(1-p)$$

$$P(X=0, Y=3) = 0$$

$$P(X=0, Y=4) = 0$$

$$P(X=1, Y=1) = \binom{2}{1} p(1-p) \cdot (1-p)^2$$

$$P(X=1, X=2) = \binom{2}{1} \cdot p(1-p) \cdot \binom{2}{1} \cdot p(1-p)$$

$$P(X=1, Y=3) = \binom{2}{1} \cdot p(1-p) \cdot p^2$$

$$P(X=1, Y=4) = 0$$

$$P(X=2, Y=2) = p^2 (1-p)^2$$

איך מתפלג $X-Y$?

תשובה: $Bin(2,p)$

X - זה מספר ההצלחות בשני הניסיונות הראשונות.

Y - מספר הצלחות בארבעת הניסיונות הראשונים.

$X-Y$ - זה מספר ההצלחות שאינן בשתי הניסיונות הראשונים זאת אומרת בניסיונות 3 ו 4 זאת אומרת בשני ניסיונות.

שאלה:

נתונים X_1,X_2 משתנים ב"ת בעלי התפלגות גאומטרית עם p. $G(p)$.

איך מתפלג X_1+X_2 ?

__כללית__: איך מתפלג סכום של n משתנים $G(p)$ בלתי תלויים?

משתנה גאומטרי סופר את מספר הניסיונות עד קבלת הצלחה בסדרת ניסויים ב"ת בעלי סיכוי p כל אחד.

טענה:

סכום של n משתנים $G(p)$ ב"ת מתפלג $NB(n,p)$

התפלגות $NB(n,p)$ סופרת את מספר הניסיונות עד קבלת n הצלחות.

$$P(Z=k)=\binom{k-1}{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot(1-p)^{k-n}$$

באופן לגבי אם אני סופרת את הזמן עד הצלחה ראשונה ואחר כך עד הצלחה שניה, אז ספרתי את הזמן עד קבלת שתי הצלחות. סופר את מספר הניסיונות עד קבלת n הצלחות.

אני אוכלת סופגניות עד קבלת סופגניה עם ריבה, אחר כך אוכל עוד סופגניות עד קבלת עוד סופגניה עם ריבה. ועוד אחד.

הזמן עד קבלת סופגניה עם ריבה מתפלג גיאומטרי: עם p $G(p)$ הזמן שאחר כך עד קבלת עוד סופגניה עם ריבה מתפלג גם $G(p)$. הזמן הכולל מתפלג כסכום של שני משתנים $G(p)$ ב"ת. זהו הזמן עד קבלת שתי סופגניות עם ריבה.

כל סופגניה היא הצלחה (עם ריבה) בסיכוי p.

הזמן עד קבלת שתי סופגניות עם ריבה מתפלג $NB(2,p)$ כי צריך להגיע לשתי הצלחות בסדרת נסיונות בלתי תלויות בעלי סיכוי p כל אחד. (כאשר ה-p שווה).

(*) נוכיח גם בדרך אלגברית שאם X ו-Y מתפלגים $G(p)$ ב"ת, אז $X+Y$ מתפלג $NB(2,p)$.

נוכיח רק את המקרה של סכום שני משתנים.

$Z=X+Y$

$$P(Z=z)=\sum P(X=x, Y=z-x)=\sum_{x=1}^{z-1} P(X=x)\cdot P(Y=z-x)$$

$$=\sum_{x=1}^{z-1} p\cdot q^{x-1}\cdot p\cdot q^{z-x-1}=\sum_{x=1}^{z-1} p^2\cdot q^{z-2}=(z-1)\cdot p^2\cdot q^{z-2}=\binom{z-1}{1}\cdot p^2\cdot q^{z-2}$$

זו פונקצית ההסתברות של משתנה $NB(2,p)$.

התפלגות מותנה:

יש משתנה Y עם התפלגות מסוימת. אבל הוא יכול
מאורע מסוים והתפלגות שלו יכולה להיות שונה.

דוגמא:

Y הוא הטלת קוביה תקינה Y מתפלג $U[1,6]$
אבל נניח כעת שנתון $(Y \geq 4)$. איך מתפלג כעת
Y? כעת Y יכול לקבל רק ערכים שבין 4 ל 6.

$$P(Y=4 \mid Y \geq 4) = \frac{P(Y \geq 4, Y=4)}{P(Y \geq 4)} = \frac{P(Y=4)}{P(Y \geq 4)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

באופן דומה:

$$P(Y=5 \mid Y \geq 4) = \frac{1}{3} = P(Y=6 \mid Y \geq 4)$$

ולכן בהינתן $(Y \geq 4)$, Y מתפלג $U[4,6]$

$$Y|_{y \geq 4} \sim U[4,6]$$

דוגמא:

X,Y מתפלגים $U[1,6]$ ב"ת. $Z=X+Y$

איך מתפלג X בהינתן $Z=10$?

$$P(X=4\mid Z=10)=\frac{P(X=4,Z=10)}{P(Z=10)}=$$

$$=\frac{P(X=4)\cdot P(Y=6)}{P(X=4)\cdot P(Y=6)+P(X=5)\cdot P(Y=5)+P(X=6)\cdot P(Y=4)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}$$

באופן דומה:

$$P(X=5\mid Z=10)=P(X=6\mid Z=10)=\frac{1}{3}$$

לכן בהינתן $(Z=10)$ התפלגות X היא $U[4,6]$.

שאלה נוספת:

$X\sim Bin(n,p)$, $Y\sim Bin(m,p)$ והם ב"ת. $Z=X+Y$

איך מתפלג X בהינתן $Z=z$.

$$P(X=x\mid Z=z)=\frac{P(X=x,Z=z)}{P(Z=z)}=\frac{P(X=x)\cdot P(Y=z-x)}{\binom{n+m}{z}\cdot p^z(1-p)^{n+m-z}}$$

$$=\frac{\binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x}\cdot\binom{m}{z-x}\cdot p^{z-x}\cdot(1-p)^{m-(z-x)}}{\binom{n+m}{z}\cdot p^z\cdot(1-p)^{n+m-z}}=$$

$$=\frac{\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}\cdot p^z(1-p)^{n+m-z}}{\binom{n+m}{z}\cdot p^z(1-p)^{n+m-z}}=\frac{\binom{n}{x}\cdot\binom{m}{z-x}}{\binom{n+m}{z}}$$

לכן בהינתן $Z=z$, X מתפלג

$$HG(z,n,m)$$

קיבלנו את ההסתברות המוכרת של ב.

הגדרת היפרגאומטרית. נבין תוצאה זו.

היו בסך הכל z הצלחות. כל הצלחה נזקפת לזכות X

או לזכות Y. אזי z ההצלחות אפשר לחלק בין X לבין Y

בכל דרך אפשרית. אם מקום מסוים ב X היה
הצלחה, אז הוא כבר לא יכול להיות הצלחה נוספת.
לכן הצלחות צריך לבחור אחד מבין n פינות של
הראשון ו m פינות של השני.

התפלגות פואסונית.

תזכורת: אם $X\sim P(\lambda)$ אז $P(X=x)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}$

עבור $x\geq 0$.

טענה:

אם $X\sim P(\lambda)$ ו- $Y\sim P(\mu)$ והם ב"ת זה בזה כאשר

$Z=X+Y$ מתקיים $Z\sim P(\lambda+\mu)$.

$$P(Z=z)=\sum P(X=x, Y=z-x) \underset{\text{ב"ת}}{=} \sum P(X=x)\cdot P(Y=z-x)$$

$$=\sum e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}=e^{-(\lambda+\mu)}\sum\frac{\lambda^x\cdot\mu^{z-x}}{x!\,(z-x)!}=$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!}\sum\frac{z!}{x!\,(z-x)!}\cdot\lambda^x\cdot\mu^{z-x}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!}\sum\binom{z}{x}\cdot\lambda^x\cdot\mu^{z-x}=$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!}(\lambda+\mu)^z$$

קיבלנו שהסכום מתפלג: $P(\lambda+\mu)$

טענה נוספת:

אם $X\sim P(\lambda)$ ובהינתן $(X=x)$ מתקיים

$Z\sim Bin(x,p)$ אז $Z\sim P(\lambda\cdot p)$.

המשמעות היא שברגע שמפרקים את G לאחד מהסוגים שלו

גם מתפלג פואסונית.

דוגמא:

לבנק מגיעים מספר אנשים שמתפלג $P(5)$. כל אחד מהם עולה

שהגיע לבנק רוצה לבצע הפקדה 0.4. לכן לפי הטענה

שלמדנו, מספר המגיעים לבצע מתפלג $P(5\cdot 0.4)$ שזה $P(2)$.

הוכחה ללמה:

$$P(Z=z)=\sum_{x=z}^{\infty}P(X=x)\cdot P(Z=z|X=x)$$

"X" זה מספר האנשים שנכנסו לבנק."

"Z" מספר האנשים שפונים לכספר.

$$=\sum e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}\cdot\binom{x}{z}\cdot p^z(1-p)^{x-z}=$$

אלה שלא ילכו לכספר

$$=\sum e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{\cancel{x!}}\cdot\frac{\cancel{x!}}{(x-z)!\cdot z!}\cdot p^z(1-p)^{x-z}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}\cdot p^z\cdot\lambda^z}{z!}\sum_{x=z}^{\infty}\frac{\lambda^{x-z}(1-p)^{x-z}}{(x-z)!}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda\cdot p)^z}{z!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}$$

הצבנו $k=z-x$ ולכן k מתחיל לרוץ מ-0.

$$=\frac{e^{-\lambda}(\lambda\cdot p)^z}{z!}\cdot e^{\lambda(1-p)}=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda\cdot p)^z}{z!}$$

דרך נוספת

$$\sum e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x\cdot p^z(1-p)^{x-z}}{(x-z)!\cdot z!}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda\cdot p)^z}{z!\cdot e^{-\lambda(1-p)}}\sum\frac{(\lambda p)^{x-z}}{(x-z)!}\cdot e^{-\lambda(1-p)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(\lambda\cdot p)^z}{e^{-\lambda(1-p)}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}\cdot e^{-\lambda(1-p)}$$

ה-Σ היא סכום ההסתברויות של משתנה $P(\lambda(1-p))$.
סכום ההסתברויות של משתנה הוא תמיד 1. ולכן
Σ שווה לאחד ומה שנשאר זה מה שמחוץ לה:

$$\frac{e^{-\lambda p}\cdot(\lambda\cdot p)^z}{z!}$$