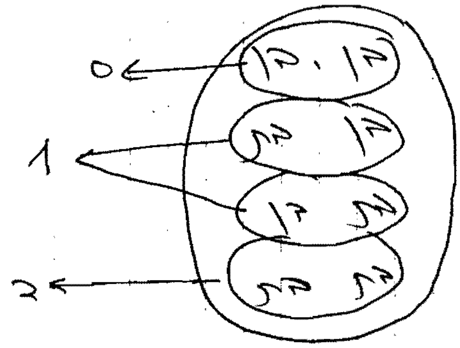
30.11.14

מבוא להסתברות - שיעור שישי

משתנים מקריים

הכרנו מרחב מדגם שבו היו תוצאות אפשריות
למשל:



הרעיון במשתנה מקרי הוא שלכל תוצאה במרחב המדגם מתאימים מספר.
זה למשל מדובר על מספר הבנות בשתי לידות.
זאת אומרת שיש פונקציה ממרחב המדגם למספרים הממשיים.
זאת פונקציה שלא חייבת להיות חד חד ערכית.
הכוונה היא שמספר מסוים יכול להתקבל יותר מפעם אחת במרחב המדגם.
המשתנה המקרי מקבל ערכים ממשיים.
משתנה מקרי נסמן באותיות גדולות. X,Y,Z....
הערכים שהוא מקבל נסמנים באותיות קטנות. x,y,z,k...
דוגמא למשתנה מקרי בלי סיפור מאחוריו: X

$P(X=0)=\frac{1}{3}$ $\quad P(X=2)=\frac{1}{6}$ $\quad P(X=8)=\frac{1}{2}$

זה משתנה מקרי שמקבל את הערכים 0,2,8...
בדוגמא של מספר הבנות:

X - מספר הבנות.

$P(X=0)=\frac{1}{4}$

$P(X=1)=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{1}{4}$

כל מה שמתקבל מתקבל בהסתברות אי-שלילית.
$\sum P(X=x)=1$ עוברים על כל האפשרויות.

בדוגמא שנתנו $P(X=0)+P(X=2)+P(X=8)=1$

נכיר היום כמה משפחות של משתנים מקריים.
אלו תיאורים של משתנים מקריים נפוצים. לכל קבוצה
יש מבנה משותף כללי, ומוגדרות ע"י פרמטרים מסוימים.

דוגמא ראשונה:

$X\sim U[a,b]$ כאשר אומרים שהוא מקבל את כל
אחד מהערכים שבין a,b כולל בסיכוי שווה.
דוגמא למשתנה כזה:
גולה יוצאת מתוך המקומות בין 1 ל-20 ~~אחד~~ בסיכוי
שווה.
X - מיקומה של גולה.

$$X \underset{\text{מקבל}}{\sim} \underset{\text{אחיד}}{U}[1,20]$$

$$P(X=7)=\frac{1}{20}$$

$$P(X=x)=\frac{1}{20} \quad \forall\, 1\le x\le 20$$ שלם.

אם X מקבל אחיד אז אני יודעת את שני הפרמטרים
של הקצה, העליון והתחתון.

שאלה:
נתון: $X\sim U[a,b]$ מהו $P(X=k)$ עבור k
שלם $a\le k\le b$?

~~תשובה~~ תשובה: $\frac{1}{b-a+1}$ כי יש $b-a+1$ ערכים
מסוימים אחד כי זה
מספר הערכים.

מהו $P(X\le k)$ עבור k שלם $a\le k\le b$?

תשובה: $\frac{k-a+1}{b-a+1}$ נימוק:

$$P(X\le k)=P(X=a)+P(X=a+1)\ldots+P(X=k)=\frac{1}{b-a+1}+\ldots+\frac{1}{b-a+1}$$

שלם מסוימים 1 בכלל הקבוצה.
$$=\frac{k-a+1}{b-a+1}$$

משפחה נוספת:

אינדיקטורים:

משתנה הוא אינדיקטור אם הוא מקבל רק ערכים של 0 או 1.

את 1 הוא מקבל בסיכוי p. X אינדיקטור

$$P(X=1)=p$$

$$P(X=0)=1-p$$

נהוג לסמן אותם גם ב $X\sim B(p)$ X מתפלג ברנולי עם פרמטר p.

אם X מתפלג ברנולי עם p זה אומר

$$P(X=0)=1-p$$

$$P(X=1)=p$$

ברנולי אומר שפרמטר מקבל 0,1.

משתנה $B(p)$ סופר את מספר ההצלחות בניסוי בודד שבו סיכוי ההצלחה הוא p.

משתנה $X\sim Bin(n,p)$ משתנה כזה סופר את מספר ההצלחות בין n נסיונות ב"ת שבכל אחד מהם יש סיכוי p להצלחה. (משפחה נוספת). הוא יכול לקבל ערכים בין 0 לn.

דוגמאות למשתנה בינומי:

10 הטלות של מטבע הוגן כאשר סופרים את מספר העצים.

$$X\sim Bin(10,0.5)$$

דוגמא נוספת:

X סופר את מספר תוצאות ה-6 ב-8 הטלות ב"ת של קוביה תקינה.

$X\sim Bin(8,\frac{1}{6})$.

נחזור לדוגמא האחרונה:

מהו $P(X=8)$. תשובה $(\frac{1}{6})^8$.

מהו $P(X=0)$ תשובה $(\frac{5}{6})^8$ -6 בפעמים לא קיבלנו.

מהו $P(X=3)$?

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5$$

הצלחנו 3 פעמים

בחמש האחרים נכשלנו.

* צריך לבחור את המיקום. לכן נוסיף $\binom{8}{3}$ לבחור את המיקום של השלושה.

$$\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5$$

מיקום ההצלחות.

כל מקרה הוא צירוף אחר לכן הסדר קובע.

באופן כללי: לגבי משתנה $X\sim Bin(n,p)$

מתקיים $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

או $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$

כאשר $q=(1-p)$.

שאלה:

$X\sim Bin(100,\frac{1}{3})$ מהו $P(X\geq 2)$?

זה שווה: $P(X=2)+P(X=3)+\dots+P(X=100)$

פתרון: $P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$

$$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}-\binom{100}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{99}=$$

בחירת מיקום ההצלחה.

$\frac{2}{3}$ זה סיכוי הכישלון בכל שלב.

ההצלחה.

שאלה:

יש m_1 כדורים כחולים ו m_2 כדורים ירוקים.
מוציאים n כדורים עם החזרה. איך מתפלג מספר הכדורים הכחולים שיצאו.

תשובה:

$$X \sim Bin\left(n, \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)$$

הצלחה:
הוצאת כדור כחול

בגלל שזה עם החזרה זה ב"ת. אחרת נוצרת הי' תלות.

התפלגות היפרגאומטרית

$$X \sim HG(n; a, b)$$

הערה: בספרות יש צורות שונות לתאר אותה. אנחנו נבחר באחת מהן.

$X \sim HG(n; a, b)$ אם X סופר את מספר הכדורים הכחולים שיצאו ב n הוצאות ללא החזרה מתוך כד שבו a כדורים כחולים ו b כדורים ירוקים.

X יכול לקבל ערכים $0 \le X$, $X \le n$, $X \le a$, $n-X \le b$

מספר הירוקים
וכמובן לא יכול להיות גדול מ b.

⊛ $;$ פסוק נקודה לא האות j

המונה מייצג מספר אפשרויות
כי שכולם סימטריים.
במונה יש בחירה של k
כחולים מתוך הכחולים
ו $n-k$ ירוקים מתוך ירוקים.

$$P(X=k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

האם ניתן לאבחן משתנה שהוא גם בינומי
וגם HG?

התשובה היא שכן, אם $n=1$, אז אין משמעות
לכך אם יש החזרה או אין.

אם אני מוציא כדור אחד מתוך 8 כחולים ; 5
ירוקים אז:

$$X\sim Bin\left(1,\frac{8}{8+5}\right)$$

וגם

$$X\sim HG(1;8,5)$$

התכונה המשותפת של בינומית ו-HG היא שבשתיהן
סופרים מספר הצלחות במספר נסיונות נתון: n.
עכשיו נעבור להתפלגויות שבהן סופרים מספר נסיונות
עד קבלת מספר הצלחות נתון מראש.

התפלגות גיאומטרית:

$X\sim G(p)$ אם X סופר את מספר הנסיונות
עד קבלת הצלחה אחת בסדרת נסיונות ב"ת שבכל אחד
מהם יש הצלחה בסיכוי p.

$$P(X=k)=p\cdot\underbrace{(1-p)^{k-1}}_{k-1}\qquad \text{או}\qquad P(X=k)=p\cdot q^{k-1}$$

פעמים של כישלון.

למשל מהו $P(X=8)$?

$$P(X=8)=p\underbrace{q^7}_{7}$$

* זה ~~ההסת~~ ההסתברות להצלחה
בפעם הראשונה בניסוי השמיני.

כשלונות ואז הצלחה אחת.

דוגמא:

מטילים קוביה ב"ת, מהו התפלגות מספר ההטלות עד קבלת תוצאה 6 לראשונה?

$$X \sim G\left(\tfrac{1}{6}\right)$$

$$P(X=k) = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

עבור $k \geq 1$.

התפלגות נוספת: בינומי שלילי

$$X \sim NB(n,p)$$

אם מבצעים סדרת נסויים ב"ת בעלי סיכוי p עד קבלת n הצלחות.

תחום הערכים האפשריים $X \geq n$.

$$P(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n \underbrace{q^{k-n}}_{\text{כשלונות}} = \underbrace{\binom{k-1}{n-1} p^{n-1}}_{\text{ההצלחות בחירת המיקום.}} \cdot \underbrace{(1-p)^{k-n}}_{\text{הכישלונות } k-n \text{ שלמים!}} \cdot \underbrace{p}_{\text{ההצלחה האחרונה.}}$$

הניסוי האחרון הניסוי ה-k חייב להיות הצלחה כי הוא קוטע את הסדרה, אם הוא לא יהיה הצלחה אז הרצף נקטע לפני ולא נגיע ל-k ניסיונות.

$\binom{k-1}{n-1} \leftarrow$ בוחרים את $n-1$ ההצלחות מתוך ה-$k-1$ הניסויים ולכן ההצלחה ה-n תהיה במקום ה-k.

שאלה:
מבצעים סדרת הטלות ב"ת של קוביה הוגנת. איך מתפלג מספר הניסיונות עד קבלת 8 פעמים תוצאה 6.

תשובה:

$$X \sim NB(8, \tfrac{1}{6})$$

זאת אומרת:
$$P(X=k)=\binom{k-1}{8-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{8}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-8}$$

k - סך הניסיונות. $k-8$ פעמים של כשלונות.

$\binom{k-1}{8-1}$ בחירת מיקום 7 ההצלחות הראשונות.

מתי התפלגות NB היא גם G (גיאומטרית)?
תשובה: כאשר $n=1$.

שאלה:
מוציאים ללא החזרה כדורים מכד שבו 4 כדורים שחורים ו-2 כדורים לבנים. מהי התפלגות מספר הכדורים שיוצאו עד קבלת הכדור השחור הראשון.

תחום הערכים האפשריים: 1,2,3 (כי יש 2 כדורים לבנים).

$$P(X=1)=\frac{4}{4+2}=\frac{4}{6}$$

$$P(X=2)=\frac{2}{4+2}\cdot\frac{4}{4+1}$$ ← הראשון לבן

$$P(X=3)=\frac{2}{4+2}\cdot\frac{1}{4+2-1}\cdot 1$$ ← השניים הראשונים לבנים.

נניח שיש לנו a כדורים שחורים ו b כדורים לבנים.

תחום הערכים האפשריים הוא בין 1 ל 1+b.

ננסה לתת ביטוי כללי לנוסחה:

$$P(X=k) = \frac{\binom{b}{k-1}}{\binom{a+b}{k-1}} \cdot \frac{a}{a+b-(k-1)}$$

k-1 הראשונים חייבים להיות לבנים!
בפעם ה-k צריך הבחירה הראשונה שבה נקבל שחור
לכן א-ג.

נחלק הראשון אפשר את הסיכוי להגיע לפעם הk. צריך
בוא הפעמים הראשונות להוציא רק כדורים לבנים.
הסיכוי לכך הוא $\frac{\binom{b}{k-1}}{\binom{a+b}{k-1}}$

לאחר מכן צריך בפעם ה-k להוציא כדור שחור כאשר
יש $a+b-(k-1)$ כדורים סך הכל. ויש a כדורים
שחורים. לכן הסיכוי הוא $\frac{a}{a+b-(k-1)}$

התפלגות נוספת: התפלגות פואסונית.

$X \sim P(\lambda)$ יש פרמטר יחיד λ ויכול להתקבל כל ערך אי שלילי. הפרמטר λ הוא בהגדרה חיובי.

פונ"ה נתונה ע"י $P(X=x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$

עבור כל $0 \leq x$.

למשל נניח ש: $X \sim P(2)$. מהי $P(X=0)$

$$P(X=0) = e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} = e^{-2}$$

$$P(X=1) = e^{-2} \cdot \frac{2^1}{1!} = 2 \cdot e^{-2}$$

נשים לב שעבור כל x מתקיים $e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \geq 0$

סכום ההסתברויות על כל הערכים השונים הוא 1.

שאלה:

$X \sim P(3)$, מהו $P(X \geq 2)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!} - e^{-3} \cdot \frac{3^1}{1!} =$$

$$= 1 - 4 \cdot e^{-3}$$

התפלגות דו-מימדית:

יש שני משתנים X,Y שמקבלים ערכים שונים של ערכים.

למשל X - מספר ילדים ; Y - מספר מכוניות.

את ההתפלגות המשותפת ניתן להציג בטבלה.

X \ Y	0	1	3	
0	0.1	0	0.4	0.5
2	0.3	0.2	0	0.5
	0.4	0.2	0.4	

בתוך הטבלה רשומות ההסתברויות של הצירופים השונים.

בשולי הטבלה רשומות ההתפלגויות השוליות של המשתנים המקריים. x ו y.

סכום האיברים שבתוך הטבלה מסתכם ב-1.

כל שול מסתכם ב-1.

כזכור מאורעות A ו B הם בלתי תלויים אם

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

כזכור משתנים X,Y הם ב"ת אם לכל x,y מתקיים:

$\cancel{P(X=x)}$

$$P(X=x, Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y)$$

כדי שהם יהיו ב"ת כל תא צריך להתקבל מהסתברות שנוצרה למכפלת ההסתברויות של ערכי שני המשתנים.

כאן המשתנים בדוגמא הנ"ל הוא תלוי. כיוון למשל

$P(X=0,Y=1)=0$ לא שווה: $0.5\cdot 0.2=P(X=0)\cdot P(Y=1)$

30.11.14

דוגמא נוספת:

X\Y				
	0.25	0.2	0.05	0.5
	0.25	0.2	0.05	0.5
	0.5	0.4	0.10	

המשתנים הנ"ל ב"ת כי עבור כל זוג ערכים:

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y)$$

דוגמא:

מטילים שתי קוביות ב"ת תקניות.

יהי X תוצאת ההטלה הראשונה.

יהי Y - המקסימום של שתי ההטלות.

מצאו התפלגות משותפת של (X,Y).

$X \sim U[1,6]$ התפלגות אחידה.

$$P(Y=1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

נבנה טבלת התפלגות משותפת.

* כדי לקבל מקסימום של 2 יש אפשרות של (2,1) (2,2) לכן שתי אפשרויות.

X\Y	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

המשתנים תלויים.

ההתפלגות השולית של Y.

$$P(Y=1)=\frac{1}{36}\ ,\ P(Y=\tfrac{3}{36})\ \dots$$

$$P(Y=k)=\frac{2k-1}{36} \qquad 1\leq k\leq 6$$

הסבר נוסף להתפלגות השולית של Y.

$$P(Y=k)=P(Y\leq k)-P(Y\leq k-1)=$$

$$=\frac{k^2}{36}-\frac{(k-1)^2}{36}=\frac{k^2-(k-1)^2}{36}=\frac{2k-1}{36}$$

$$\frac{k}{6}\cdot\frac{k}{6}$$