23.11.14

מבוא להסתברות - שיעור חמישי

דוגמה

יש שני כדים בכד הראשון יש 90 כדורים שחורים ו10 כדורים לבנים ובכד השני יש 10 כדורים שחורים ו90 כדורים לבנים.

בוחרים בסיכוי שווה באחד הכדים ומבצעים בו הוצאה עם החזרה של כדורים.

יהי A_1 - בחרנו בכד הראשון

A_2 - בחרנו בכד השני

B_1 - הכדור הראשון שחור

B_2 - הכדור השני שחור.

$$P(B_1) = P(A_1)\cdot P(B_1|A_1) + P(A_2)\cdot P(B_1|A_2)$$

זה היה לפי הסתברות שלמה.

$$P(B_1) = 0.5\cdot\frac{90}{90+10} + 0.5\cdot\frac{10}{90+10} = \frac{1}{2}$$

מהו $P(A_1|B_1)$ כלומר מהו הסיכוי שבחרנו בכד הראשון בהינתן שהכדור הראשון היה כדור שחור?

$$P(A_1|B_1) = \cancel{P(B_1)}\,\frac{P(A_1\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(A_1)\cdot P(B_1|A_1)}{0.5\cdot\frac{90}{90+10} + 0.5\cdot\frac{10}{90+10}}$$

הסתברות מותנה.

$$= \frac{P(A_1)\cdot P(B_1|A_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{90}{100}}{0.5} = 0.9$$

נוסחת ב"ס בעצם אומרת שהחיתוך יהיה $P(A_1)$ בכלל הסתברות מותנה כי לפי B_1 צריך להתחשב A_1.

אם הכדור הראשון יצא שחור אז זה מגדיל את הסיכוי שבחרנו בכד הראשון.

24.11.14

נניח שהכדור הראשון שחור מה ההסתברות שהשני גם יהיה שחור?

יש תלות בין צבעות שני הכדורים כי אם הכדור הראשון היה שחור זה מגדיל את הסיכוי שאחזור בכד הראשון לכן זה מגדיל את הסיכוי שגם הכדור השני יהיה שחור.

פתרון בדרך הנוסחה:

$P(A_1|B_1)=0.9$ $\quad P(A_2|B_1)=0.1$ (המשלים).

$$P(B_2|B_1) = P(A_1|B_1)\cdot\frac{90}{90+10} + P(A_2|B_1)\cdot\frac{10}{90+10}$$

משקלים הסיכויים שאחזר בכדים השונים לאור התוצאה שהתקבלה.

גישה שניה:

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_2\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(A_1)\cdot P(B_1\cap B_2|A_1)+P(A_2)\cdot P(B_1\cap B_2|A_2}{0.5}$$

בהינתן שבחרתי בכד הראשון.

$$= \frac{0.5\cdot\frac{90}{100}\cdot\frac{90}{100}+0.5\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{10}{100}}{0.5}$$

הכדורים תלויים. לכן חייבים להשתמש בהסתברות מותנית.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

אם A,B ב"ת אז $P(A)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

ולכן $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

אם הם ב"ת.

24.11.14

סוגייה:

יש חמישה כדורים כחולים שבעה כדורים ירוקים וארבעה כדורים אדומים.

מוציאים עם החזרה כדורים.

מה הסיכוי שהכדור הראשון שאינו כחול הוא ירוק?

התשובה האינטואיטיבית היא $\frac{7}{7+4}$ כי הוא נבחר מהאוכלוסייה של הירוקים והאדומים.

גישה נוספת על ידי סכום מאורעות זרים:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{16}\right)^k \cdot \frac{7}{16} =$$

בהתחלה אני נכשלת ומקבלת רק כדורים כחולים.

ירוק
כחול ירוק
כחול כחול ירוק
⋮

ובסופו של דבר מקבלים כדור ירוק. ומצליחים.

$$= \frac{7}{16} + \frac{5}{16}\cdot\frac{7}{16} + \left(\frac{5}{16}\right)^2\cdot\frac{7}{16} + \ldots$$

זה טור אינסופי כיוון שיש החזרה.

גישה נוספת:

יהי a הסיכוי שנקבל ירוק <u>לפני</u> אדום (זה המאורע המבוקש). חשוב ירוק לפני אדום ולא ירוק ראשון.

$$a = \frac{7}{5+7+4}\cdot 1 + \frac{4}{5+7+4}\cdot 0 + \frac{5}{7+5+4}\cdot a$$

זה הסיכוי לקבל אדום ראשון (כישלון).

מכאן אפשר להמשיך.

אם הכדור הראשון כחול אז חזרנו לתנאי ההתחלה. מחזירים אותו ומסתכלים באותה סיטואציה כמו שהייתה בהתחלה. קיבלנו משוואה וניתן לחלץ את a.

24.11.14

סוגיה:

יואב ורמי מנהלים דו קרב. כל אחד בתורו מנסה לפגוע באחר. יואב מתחיל ראשון. סיכוי פגיעה יואב הם 0.7, וסיכוי של רמי הם 0.8.

מי שפוגע ראשון הוא הזוכה. מה סיכוי של יואב לזכות?

גישה ראשונה:

יואב יזכה אם ההצלחה הראשונה תבוא מאצבעותיו שלו ולא שלי. מה הסיכוי שיצליח כבר בפעם הראשונה? 0.7

מה הסיכוי שהוא יצליח ראשון בפעם השלישית? $\underbrace{(1-0.7)}_{\text{נכשל}}\underbrace{(1-0.8)}_{\text{השני נכשל}}\underbrace{0.7}_{\text{הצליח}}$

לפעם הבאה יש לו סיכוי $(1-0.7)(1-0.8)(1-0.7)(1-0.8)\cdot 0.7$ בסך הכל

סיכוי של יואב הם: $\sum_{k=0}^{\infty}\left((1-0.7)(1-0.8)\right)^k\cdot 0.7$

* כי לכל חלק יש שני צעדים. נכשל ואז השני נכשל.

גישה שנייה:

יהי a סיכוי של יואב לזכות.

$$a = \underbrace{0.7\cdot 1}_{\text{הסיכוי שלו לזכות מיד.}} + \underbrace{(1-0.7)\cdot 0.8\cdot 0}_{\text{הסיכוי שנכשל ולכן כפול 0.}} + (1-0.7)(1-0.8)\cdot a$$

קיבלנו משוואה שממנה ניתן לחלץ את a.

שאלה: מה הסיכוי שלעולם לא תהיה הכרעה?

כדי שלעולם לא תהיה הכרעה צריך למשל יואב להיכשל אינסוף פעמים ברציפות. הסיכוי שהוא יפול מאה פעמים הוא 0.3^{100}

הסיכוי שהוא יכשל n פעמים הוא 0.3^n. הוא צריך להיכשל יותר מ-n פעמים עבור כל n טבעי לכן הסיכוי קטן מ-0.3^n

עבור כל n טבעי. לכן הוא חייב להיות שווה ל-0

24.11.14

למאורע שאף פעם לא יקבל הכרעה יש הסתברות 0. לכן בוודאות משה או רמי צודק.
נחשב קצת שונה לחישוב סיכוי של משה לצדוק:
יהי a סיכוי של משה לצדוק כאשר זה תורו.
יהי b סיכוי של משה לצדוק כאשר זה תורו של רמי.
מעוניינים בערך a כי משה מתחיל.

$$a = 0.7\cdot 1 + (1-0.7)\cdot b$$
$$b = 0.8\cdot 0 + (1-0.8)\cdot a$$

מהמערכת אפשר לקבל את a.

כזכור מאורעות A,B הם ב"ת אם $P(A|B)=P(A)$
או אם $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
דוגמה ~~לזה~~ לזוג מאורעות בלתי תלויים. מטילים שני מטבעות הוגנים שאין קשר ביניהם (אין תלות ביניהם).
יהי a הראשון עץ
b השני עץ

$\cancel{P(A)=P(B)=}$
$$P(a)=P(b)=\frac{1}{2}$$

$$P(a\cap b)=\frac{1}{4}$$
נגדיר מאורע c - סכום מספר העצים בשתי ההטלות הוא זוגי.
עכשיו יש לנו שלושה מאורעות (A,B,C). האם כל זוג מהמאורעות האלה הם ב"ת כמו A,B ב"ת.
מה לגבי A, C? $P(C|A)=\frac{1}{2}$ כי כבר יש עץ אחד לכן $\frac{1}{2}$.
לכן $P(C)=P(C|A)$ $\qquad P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
לכן A,C ב"ת. גם B,C ב"ת. כל זוג משלושת המאורעות
האלה הם ב"ת

24.11.14

אבל $P(C|A\cap B)=1$

כי אם פעמיים התקבל אז גם C התרחש.

קיבלנו שיש הבדל בין אי תלות בזוגות לבין אי תלות כללית. בדוגמא האחרונה אין אי תלות כללית למרות שכל זוג מאורעות הם בלתי תלויים.

באופן כללי כדי לבדוק אם יש אי תלות כללית ~~[illegible]~~ מעבר לזוגות מאורעות צריך לבדוק אם יש השפעה של מספר מאורעות על מספר אחר של מאורעות.

לגבי n מאורעות A_i, צריך לבדוק אם

$$P\left(\bigcap_k A_{i_k}\right)=\prod_k P(A_{i_k})$$

צריך לבדוק אם לכל תת סדרה של המאורעות הסתברות החיתוך שלהם ~~שוה~~ שווה למכפלת ההסתברויות שלהם.

כדי לומר שיש אי תלות כללית צריך לעבור על כל תת קבוצות של מאורעות.

אם למשל יש מאורעות $A_1,A_2,A_3,\dots A_{10}$

אז צריך לבדוק עבור כל תת קבוצה של $\{1,2,\dots,10\}$ שהסתברות החיתוך שלהם שווה למכפלת ההסתברויות שלהם.

למשל נראה רק בדיקה אחת:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_5\cap A_8)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_5)\cdot P(A_8)$$

זאת רק בדיקה אחת. יש קרוב ל 2^{10} בדיקות שצריך לעשות. מספיק ~~[illegible]~~ למצוא אחד שלא נכון והוכחנו שיש תלות.

אם יש שוויון בכולם אז יש אי תלות כללית.

24.11.14

<u>שאלה</u>

יש n מטבעות ב"ת. כל אחד מהם נזרק פעם ב"ת באחרים.

נסתכל על המספר הכולל של עצים שנקבל בהטלות.

טענה: אם לפחות אחד מהם הוגן אז הסכום זוגי בסיכוי חצי.

נניח שהאחרון הוגן. מה הסיכוי שהסכום זוגי?

A_n הסכום של n הטלות הוא זוגי.

$$P(A_n) = P\left(\text{סכום } n-1 \text{ הראשונות זוגי}, \text{ האחרון } \underbrace{\text{פלי}}_{\text{פלי} = 1}\right) + P\left(\text{סכום } n-1 \text{ הראשונות אי זוגי}, \text{ האחרון עץ}\right)$$

$$P(A_{n-1}) \cdot 0.5 + P(\overline{A_{n-1}}) \cdot 0.5 = [\underbrace{P(A_{n-1}) + P(\overline{A_{n-1}})}_{1}] \cdot 0.5 =$$

$$= 1 \cdot 0.5 = \frac{1}{2}$$

<u>הסבר אינטואיטיבי</u>

האחרון מקבל את הדין. בכל מקרה הוא יקבע לסכום זוגי בסיכוי חצי.

למשל אם סכום הקודמים הוא 17, אז הוא ישלים לסכום 18 בסיכוי חצי.

וגם אם הסכום הקודם 28, אז הוא ישאיר 28 בסיכוי חצי.

24.11.14

<u>שאלה</u>

מטילים n מטבעות הוגנים ב"ת. מה הסיכוי
של הצירוף יופיע ברצף אחד (הרצף יכול להיות באורך
0 עד אורך n).

שאלות לחימום:

מה הסיכוי שלא יהיה פ פ $(1-0.5)^n$

פתרון בדרך הראשונה:

נתנה בתוצאת ההטלה הראשונה.
אם היא הייתה "ע", אז נשאל מה הסיכוי מעתה
שיהיו לנו?
מהפך הוא תוצאה שונה מהתוצאה הקודמת.
מותר שעד הסוף יהיה לי 0 מהפכים או מהפך אחד
(אני מהפך לפלי ואז חוזר לעץ).
מה הסיכוי שבמקום מסוים יהיה מהפך? זה הסיכוי לפלי
עץ או לעץ פלי. הסיכוי לזה הוא $0.5\cdot0.5\cdot0.5=0.5$
מה הסיכוי שיהיו לי 0 מהפכים אחרי ההטלה הראשונה? 0.5^{n-1}
מה הסיכוי שיהיה מהפך אחד בדיוק?

0.5^{n-1} $\binom{n-1}{1}\cdot0.5\cdot0.5^{n-2}=(n-1)\cdot0.5^{n-1}$

0 מהפכים?   ביחד $-\,n\cdot0.5^{n-1}$

כי יש n-1 אפשרויות לבחור את המיקום של המהפך
בו צריכה להיות הצלחה ואחרי כישלון.
בין מקום ראשון לאחרון יש n-1 מקומות שבהם יכול
להיות מהפך.
כעת נניח שהראשון הוא פלי. מותר שיהיו 0 אחד או
שני מהפכים.
הסיכוי לכך $0.5^{n-1}+\binom{n-1}{1}\cdot0.5^{n-1}+\binom{n-1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

כעת נאמר שאנו כבר יודעים מה הסיכוי כאשר הראשון
הוא עץ, אז אנו גם יודעים מה הסיכוי כאשר הראשון הוא פלי.

24.11.14

הפיתרון השלם הוא:

$$P(\text{פואסון זוגי})\cdot P(\text{0 או 1 מהפכים}) + P(\text{פואסון פרדי})\cdot P(\text{0,1 או 2 מהפכים}) =$$

$$= \underbrace{0.5}_{\text{פואסון זוגי}} \cdot \underbrace{(n)\cdot 0.5^{n-1}}_{\text{0,1 מהפכים}} + \underbrace{0.5}_{\text{פואסון פרדי}} \cdot \left[1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\cdot 0.5^{n-1}\right]$$

זה כל כי ההסתברות שלה שמתנו בתוצאה הראשונה.

<u>פיתרון בדרך שניה</u>

מה ההסתברות שכולם פלי - רצף באורך 0 0.5^n

מה ההסתברות של רצף יותר של ff באורך 1..

$$n\cdot 0.5\cdot 0.5^{n-1} = n\cdot 0.5^n$$

מה הסיכוי שיש רצף יחיד באורך 2:

הסיכוי שבמקום מסוים מתחיל רצף יחיד באורך שתיים הוא

$$0.5^2\cdot 0.5^{n-2} = 0.5^n$$

אבל יש n-1 מקומות למקם רצף באורך שתיים. לכן

הסיכוי הוא $(n-1)0.5^n$.

הסיכוי לרצף יחיד באורך k במקום מסוים הוא 0.5^n.

אבל יש $(n-k+1)$ מיקומים אפשריים לרצף כזה.

לכן הסיכוי הוא $(n-k+1)\cdot 0.5^n$.

בסך הכל הסיכוי לרצף יחיד הוא

$$\underbrace{0.5^n}_{\text{באורך 0}} + \underbrace{n\cdot 0.5^n}_{\text{באורך 1}} + \underbrace{(n-1)\cdot 0.5^n}_{\text{באורך 2}} + \underbrace{(n-2)\cdot 0.5^n}_{\text{באורך 3}} + \dots + \underbrace{1\cdot 0.5^n}_{\text{באורך } n}$$

$$= 0.5^n + 0.5^n\sum_{k=1}^{n} k = 0.5^n + 0.5^n\frac{(1+n)n}{2}$$

24.11.14

<u>שאלה</u>

דני קיבל 8 קלפים ורמי קיבל 2 קלפים. הקלפים נספרו בסדר אקראי. מה הסיכוי שרמי הוביל באיזשהו שלב.

רמי יוביל רק אם הוא קיבל את הקלף הראשון ועוד קלף כלשהו או שהוא קיבל את השני והשלישי.

נסתכל על מרחב מדגם על בחירת שני המקומות לקלפים של רמי.

$$|\Omega| = 1\cancel{8}\binom{10}{2}$$

$$|A| = \binom{1}{1}\binom{9}{1} + \binom{2}{2}$$

את הקלפים מבין 2 ו-3.

$$P = \frac{\binom{1}{1}\binom{9}{1} + \binom{2}{2}}{\binom{10}{2}}$$

דרך נוספת:

מרחב מדגם של סידור 10 הקלפים בשורה. $|\Omega| = 10!$

$$|A| = 2\cdot 9! + 2!\cdot 8!$$

אחד מהקלפים של רמי למקום הראשון.

סידורים שונים בשני המקומות השני והשלישי