9.11.14

מעגלים 2 קודות
להראות: כמה אפשרויות
יש?

מבוא להסתברות - שיעור שלישי

היום נדבר על מרחבי הסתברות סימטריים.

לכל נקודה במרחב יש אותה הסתברות.

לכן: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

דוגמא:

מושיבים עשרים אנשים בשורה. מה הסיכוי שתייר ישב במקום 8?

נציג יותר מפיתרון אחד.

א. $|\Omega| = 20!$ - סידור כל האנשים בשורה.

$|A| = 19!$

לכן: $P(A) = \frac{19!}{20!} = \frac{1}{20}$

ב. $|\Omega| = 20$ המיקום של תייר

$|A| = 1$ המיקום של תייר הוא שמונה.

אמנם מרחב מדגם שונה לכן גם המאורע הוא אחר.

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{20}$

דוגמא:

מושיבים סביב מעגל 20 אנשים. מה ההסתברות שטופז ישב ליד בור?

פיתרון ראשון:

Ω - סידור האנשים במעגל. $|\Omega| = 19!$

$|A| = 2! \cdot 18!$

הסידור הפנימי של טופז ובור.

$P(A) = \frac{2! \cdot 18!}{19!} = \frac{2}{19}$

זו נראית תשובה הגיונית כי אני צריך לבחור שני שכנים לטופז מתוך 19 אפשריים והסיכוי של בור להיות בין השניים

9.11.14

הוא $\frac{2}{19}$.

פתרון שני:

מתפקס על בחירת השכנים של יוסי.

$$|\Omega| = \binom{19}{2} \qquad |A| = \binom{1}{1}\cdot\binom{18}{1}$$

A - בחירת השכנים של יוסי כך שדרור הוא אחד מהם.

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{18}{1}}{\binom{19}{2}} = \frac{18}{\frac{19\cdot 18}{2}} = \frac{2}{19}$$

שאלה:

יש 50 כדורים שרופים ו 100 כדורים לא שרופים

מוציאים ~~שלושה~~ שמונה כדורים. מה ההסתברות שלפחות

אחד מהם אינו שרוף?

פתרון לא יעיל:

$$|\Omega| = \binom{150}{8} \qquad |A| = \binom{100}{1}\binom{50}{7}\dots\binom{100}{8}$$

זה על פי חלוקה למקרים על מספר הלא שרופים.

הוא צריך לנוע בין 1 ל- 8.

פתרון יותר לפי המשלים:

הכל מותר חוץ מלהוציא את

כולם מבין השרופים.

$$|\Omega| = \binom{150}{8}$$

$$|A| = \binom{150}{8} - \binom{50}{8}$$

זה המשלים. המצב שבו כל

הכדורים שרופים.

המשלים הוא $\binom{50}{8}$.

9.11.14

שאלה:

זורקים m כדורים ל-n תאים.

מה ההסתברות שכל הכדורים יהיו באותו תא.

פתרון:

$$|\Omega| = n^m \qquad P(A) = \frac{n}{n^m}$$

$$|A| = n$$

צריך לבחור בתא ולשים בו את כולם.

שאלה נוספת:

נניח ש $m=n$ מה ההסתברות שבכל תא יהיה כדור?

$$|\Omega| = n^m = n^n$$

$$|A| = n(n-1)\dots 1 = n!$$

כל פעם יורדת לי אפשרות לשים כדור.

מאורע A זה כדור לא יהיה בתא שכבר נתפס על ידי ~~אחד~~ כדור אחר. לכן כל פעם מספר האפשרויות מצטמצם ב-1.

$$p(A) = \frac{n!}{n^n}$$

עכשיו נניח ש $m=n+1$ מה ההסתברות שבכל תא יהיה לפחות כדור אחד?

$$|\Omega| = n^{n+1}$$

$$|A| = \binom{n+1}{2} \cdot n!$$

בוחרים איזה שניים יהיו ביחד.

מסדר את הזוג של השתיים ואת n-1 האחרים.

נשאר לנו n-1 אלמנטים אבל יש לנו סך הכל n כי חיברנו כדורים לכן נשאר $n!$.

9.11.14

פתרון מפורט:

$$|A| = n! \cdot n$$

כי לכל סדר שנסדר את n הכדורים השונים, יש n התאים ונוסיף את הכדור לאחד התאים.

הטעות היא שלא נתנו אפשרות לשים את 2 הכדורים שיהיו ביחד. לא באמת הכדור צריך להבדיל ביניהם.

לא תמיד הכדור מבדיל ולכן זו טעות.

ניתן לתקן את הטעות הבאה:

נבחר את הכדור שיבדיל לאחר. יש $n+1$ אפשרויות. אחר כך נסדר את היתר ונבחר לכדור המיוחד תא כזה.

$$|A| = (n+1) \cdot n! \cdot n$$

בחירת זה שהבדיל $(n+1)$.

סידור היתר $(n!)$.

בחירת תא לזה שהבדיל (n).

יש כאן כפילות בספירה. נניח שלא לבחור את המיוחד ולהבדיל לטעם. ושוב שלא לבחור כמיוחד להבדיל לשני. נקבל בדיוק את אותו סידור. ספרנו פעמיים את אותו סידור.

אפשר לתקן את הפתרון הזה ע"י חלוקה ב-2. כי כל סידור נספר בדיוק פעמיים. לכן הפתרון הנו: $|A| = \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n}{2}$

זה פתרון ע"י שיטה של פתרון לא נכון. (לא מומלץ).

הפתרון הראשון שנתנו שלא התבסס על שיטה זו.

שאלה:

מטילים n+2 כדורים ל-n כדים. מה ההסתברות שבכל כד יהיה לפחות כדור אחד?

$|\Omega| = n^{n+2}$

יש שני מקרים אפשריים: או שיש כד אחד עם שלושה והיתר אחד. או שני כדים עם שניים והיתר אחד בכל אחד.

A_1 - יהיה המאורע הראשון.

A_2 - יהיה המאורע השני.

$$|A| = |A_1| + |A_2|$$

$$|A_1| = \binom{n+2}{3} \cdot n!$$

$$|A_2| = \binom{n+2}{4} \cdot 3 \cdot n! = \binom{n+2}{2}\binom{n}{2} \cdot n! \Big/ 2$$

בוחרים את הרביעיה אחר כך מחלקים לשני זוגות, כי המצב שמצבם את שלו יהיה לי כפילות בספירה.

כאן יש גם את הסידורים הפנימיים של הזוג ולכן צריך לחלק ב-2 כי ספרנו את אותו דבר פעמיים.

$n!$ מייצג את הסידור של n אלמנטים (שחלקם מורכבים מכמה) בתוך n כדים.

<u>בעיית יום ההולדת:</u>

שני אנשים, מה הסיכוי שיש להם אותו יום הולדת?

$|\Omega| = 365^2 \qquad |A| = 365$

בוחרים לאחד יום ואז השני חייב לקבל את אותו יום.

$$P(A) = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365}$$

9.11.14

שאלה:

מהי ההסתברות שבכיתה בת k אנשים לכולם יש יום הולדת בתאריך שונה?

פתרון:

$$|\Omega| = 365^k$$

$$|A| = 365\cdot 364 \cdots (365-k+1) = (365)_k = \binom{365}{k}\cdot k!$$

מספר המצבים הסדורים בגודל k מתוך 365.

בחרתי k ימים ואני צריכה לסדר את k האנשים בk הימים.

$$(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

במקרה הזה יש לי חשיבות לסדר.

שאלה:

זורקים 2 כדורים לשני כדים.

מהי ההסתברות ששני הכדורים יהיו בכד הראשון.

פתרון:

נתייחס לכדורים כאל שונים $|\Omega| = 2^2 = 4$

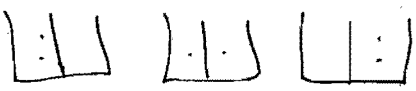
$|A| = 1$ $\qquad P(A) = \frac{1}{4}$

נניח שהכדורים הם זהים.

מהי ההסתברות?

זה שכאן אין צורך בצבעים לא משנה את הסיכוי. צריך להישאר אותו סיכוי.

נסתכל על סיטואציות האפשריות.



יש שלוש סיטואציות אפשריות ורק באחת מהן שני הכדורים בכד הראשון. נקבל לכאורה שההסתברות היא $\frac{1}{3}$. אבל הראינו שהסיכוי צריך להיות $\frac{1}{4}$. קיבלנו שמרחב המדגם של מרחב העצמים של כדורים האלו אינו סימטרי, לכן לכל האפשרויות שמרחב זה

9.11.14

יש אותה הסתברות. יש אפשרות שיש לה שני הסברים
שונים. $\boxed{1.1}$ באפשרות זו אפשר להחליף בין הכדורים.
לכן ראינו שבכל מקרה צריך לבחור את מרחב של כדורים
שונים כי מרחב עצמו של זהים אינו סימטרי.
בדוגמא שלנו האפשרות השניה מורכבת משני תת' מקרים.
אסור לבחור את מרחב מדגם שאינו סימטרי.
מתקיים $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$ רק אם Ω מרחב מדגם סימטרי.

אם לא בכל נקודה ב-Ω יש את אותה הסתברות אז
זה לא נכון..

<u>בכל צורה נשאל שאלה בקומבינטוריקה:</u>

מה מספר האפשרויות לחלוקת m כדורים <u>זהים</u> ל-n תאים?
נתחיל במקרה פשוט שבו $n=2$ מה מספר האפשרויות לחלק m
כדורים זהים ל-2 תאים.
יש $m+1$ אפשרויות.
נעמיד את הכדורים בשורה ורק נוסיף מחיצה. מה שמשמאל
ילך לאחד ומה שמימין ילך לשני. ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
כל מיקום של המחיצה נותן חלוקה אחרת
לכן $m+1$ אפשרויות. כי יש לנו מחיצה אחת בנוסף ל-m הכדורים
עכשיו ננסה לפתור עבור n כללי. מה מספר האפשרויות לחלק
m כדורים זהים ב n תאים?
כאן צריך $n-1$ מחיצות.
מה שמשמאל לראשונה ילך לראשון מה שבין הראשונה לשניה
ילך לשני. מה שבין השניה לשלישית ילך לשלישי וכן הלאה...
מה שאחרי האחרונה ילך לאחרון.
יש m כדורים ו $n-1$ מחיצות וצריך למצוא מיקום ל-$n-1$ המחיצות
בשורה של $m+(n-1)$ מחיצות וכדורים.

7.11.14

נניח שיש 7 כדורים ; n=4

$| \circ | \circ \quad \circ | \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$

לכן מספר האפשרויות הוא $\binom{n-1+m}{n-1}$

מספר המחיצות הוא n-1 וצריך למצוא להן מקומות

מבין ה-n ; m הכדורים. יש לי בשורה סך הכל

m+n-1 מקומות להציב בהם עצמים אני צריכה לבחור.

איפה אני מציבה את ה n-1 מחיצות שלי.

במקרה שלנו יש: $m=7$; $n=4$ יש 3 מחיצות ; 7 כדורים

לכן יש $\binom{4-1+7}{3}=\binom{10}{3}$

שאלה:

עקרון ההכלה וההפרדה (הכלה והדחה).

אני בוחר מבחר של 5 קלפים מתוך חפיסה של 4·13 קלפים.

מה ההסתברות שלפחות מבין לב או מעוין לא יתקבל?

יהי A - לב לא יתקבל

B - מעוין לא יתקבל

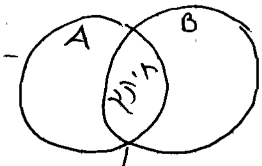
מבוקש: $P(A\cup B)$

$$P(A)=\frac{\binom{52-13}{5}}{\binom{52}{5}}=\frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}$$

זה ה 39 שאינם לבבות.

$$P(B)=\frac{\binom{52-13}{5}}{\binom{52}{5}}=\frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}$$

הם לא זרים.



כדי שלא נספור פעמיים

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}}$$

$$P(A\cup B)=\frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}+\frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}-\frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}}$$

9.11.14

החיתוך ששניהם חסרים נכלל במקרה שהראשון חסר ונכלל
גם במקרה שהשני חסר.

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

שאלה:

אני זורקת שני כדורים לשני תאים. מה ההסתברות
שלפחות כדור אחד יכנס לתא הראשון?

פתרון ראשון לפי המשלים:

$|\Omega|=2^2$

$$|A|=|\Omega|-|\bar{A}|=2^2-1=3$$

אף כדור לא יכנס לתא הראשון.

פתרון שני לפי עיקרון ההכלה וההפרדה:

A - כדור ראשון יכנס לתא הראשון.

B - כדור שני יכנס לתא הראשון:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

זה לפי עיקרון ההכלה וההפרדה.

באופן כללי עיקרון ההכלה וההפרדה אומר:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\right)-\left(\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)\right)+\left(\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)\right)-\left(\sum_{i<j<k<l}P(A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l)\right)+\dots$$

דוגמא:

נניח $P(A)=0.4,\ P(B)=0.25,\ P(C)=0.15,\ P(D)=0.1$

$$P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=0.05$$

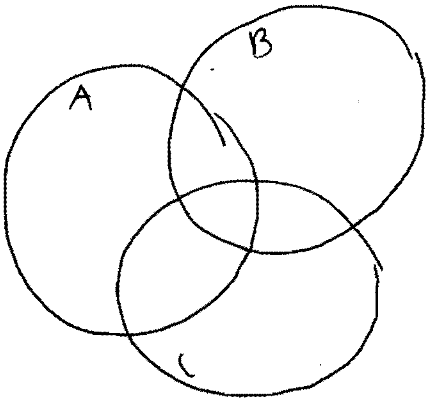
$$P(A\cap D)=P(B\cap D)=0.02 \qquad P(C\cap D=0.01$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B\cap D)=P(B\cap C\cap D)=0.005$$

$$P(A\cap B\cap C\cap D)=0.1^{*}$$

9.11.14

$$P(A\cup B\cup C\cup D)=0.4+0.25+0.15+0.1-0.05-0.05-0.05-0.02$$
$$-0.02-0.01$$
$$+0.005+0.005+0.005+0.005-0.1^{7}$$



נסביר את ההיגיון לגבי $n=3$.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(B\cap C)-P(A\cap C)-P(A\cap B)$$
$$+P(A\cap B\cap C)$$

כי את $A\cap B\cap C$ ספרתי 3 פעמים במסגרת A,B,C
והחסרתי אותו 3 פעמים במסגרת $A\cap C, B\cap C, A\cap B$
ואני רוצה לספור אותו פעם אחת לכן אני ~~רוצה~~ צריך לחבר
אותו פעם אחת.

שאלה:

בהוצאה של חמישה קלפים מחפיסה מה ההסתברות שתהיה לפחות
סדרה שלא תופיע?

$$P(A\cup B\cup C\cup D)$$

A ↓ לב לא יוצא

B ↓ יהלום לא יוצא

...

$$P(A)=\frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}=P(B)=P(C)=P(D)$$

$$P(A\cap B)=P(A\cap C)\ \ldots=\frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}}$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

$$P(A\cap B\cap C\cap D)=0$$

יש לי $\binom{4}{2}$ אפשרויות לבחור 2 צורות קלפים שלא יופיעו

$$P(A\cup B\cup C\cup D)=\binom{4}{1}P(A)-\binom{4}{2}\cdot P(A\cap B)$$
$$-\binom{4}{3}P(A\cap B\cap C)-0$$