2.11.14

מבוא להסתברות - שיעור שני

<u>זהות:</u>

להוכיח $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot k(k-1) = n(n-1)\cdot 2^{n-2}$

יש לנו משימה לבחור ועד שבו יש נשיא וסגן. בוועד יש חברים. כמות החברים הנוספים לא מוגבלת.

צד ימין:

בוחרים נשיא מתוך בוחרים סגן לבד. כל אחד מהאחרים מחליטים אם הוא יהיה בוועד.

צד שמאל:

בוחרים בקבוצה כלשהי בגודל של לפחות שניים ומהם בוחרים נשיא וסגן. ע"פ חלוקה למקרים זרים. כל מקרה שאנחנו מקבלים הם זרים.

שני ועדים הם שונים אם יש חבר שהוא בוועד אחד ולא באחר או שהנשיא או הסגן הם שונים.

<u>זהות ב:</u>

להוכיח $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

באמצעות סיפור.

יש n בנים ו-n בנות ואני רוצה לבחור מהם ועד בגודל n. ברור שמספר האפשרויות הוא $\binom{2n}{n}$ כי יש לי סך הכל $2n$ ואני רוצה לבחור $n \Rightarrow \binom{2n}{n}=\binom{n+n}{n}$.

צד שמאל:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ זה מספר האפשרויות לבחור k בנים מתוך n בנים.

$\binom{n}{n-k}$ זה מספר האפשרויות לבחור $n-k$ בנות מתוך n בנות.

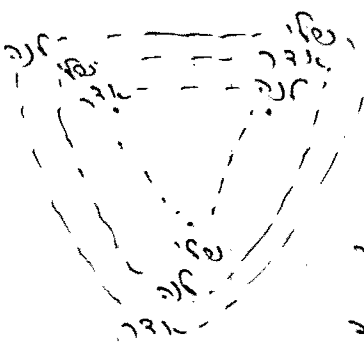
בצד שמאל יש חלוקה על פי מקרים $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ זה מספר האפשרויות לבחור k בנים ו-$n-k$ בנות. אני מוצאים את כל האפשרויות כי אני מביאים בחשבון כל ערך של k.

2.11.14

זה $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ סופר את מספר האפשרויות לבחור ועדה

בגודל n כך שמחלקים על-פי מספר הבנים.

$$\binom{n}{k}^2=\binom{n}{k}\binom{n}{k}=\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}$$



סידור במעגל:

הבחירה של המקום
של אודי עדיין לא אומר
לי שום דבר. רק אחר כך
יש לי בעיית סידור. לכן יש !2
אפשרויות לסידור ולא !3.

נראה את זה דרך אחרת.

יש 3 כסאות ולכן יש !3 סידורים וכסאות. אבל כל סידור נמצא
בקבוצה של 3 סידורים שהם שקולים. לכן יש $\frac{3!}{3}=2!$ סידורים.
באופן כללי, כשאני רוצה לסדר n אנשים במעגל את המיקום
של הראשון לא חשוב לי ולכן יש לי $(n-1)!$ סידורים.
* אם הכיסאות "צבועים"/"ממוספרים" יש ~~[illegible]~~ חשיבות לסדר לכן
זה יהיה $n!$.

זהות:

עבור כל n ועבור כל $n\ge k$ מתקיים:

הוכיחו באמצעות סיפור:
$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

אגף שמאל: ~~[illegible]~~ מספר המצבים הלא סדורים בגודל k מתוך
n. זה מספר האפשרויות לבחור k אנשים מתוך n אנשים
(אין חזרות).

2.11.14

רעיון:

אני רוצה לבחור 7 חברים מתוך 10 אנשים. כמה אני יכול לבחור מבין 9 הראשונים? אני חייב לבחור 6 או 7. אם אבחר 6 אז אוסיף את האחרון. אם אבחר 7 אז לא אוסיף את האחרון. כלומר לבחור 6 ואז אני מוסיפה את האיבר ה-10 שהורדתי. זה כלומר חיבור של מקרים זרים.

$$\underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{בחרתי 7}}+\underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{בחרתי 6}}$$

מהזהות הזאת נוכל ליצור את משולש פסקל שבו מופיעים כל המקדמים $\binom{n}{k}$ עבור n,k שונים.

כמה זה $\binom{n}{n}$? 1

$\binom{n}{n}=1$

$\binom{n}{0}=1$

$\binom{n}{1}=n$

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$$

והלאה...

בכל שורה מופיעים כל המקדמים של $\binom{n}{k}$ עבור $n\geq k\geq 0$ $0\leq k\leq n$

כל איבר ניתן לחישוב הסכום של שני איברים מהשורה שמעליו.

$\binom{4}{3}=\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$ ← זה מה שהוכחנו קודם.

כל איבר $\binom{n}{k}$ הוא סכום של ביטויים של בחירה מתוך מה שמופיעים בשורה שמעליו.

2.11.14

<u>הבינום:</u>

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

הוכחה:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ פעמים}}$$

במכפלה מכל זוג סוגריים אני צריך לבחור נציג שהוא a או b.
ואני סוכם את כל האפשרויות.
בכל פילוג מופיעה מכפלה של a-ים ושל b-ים. יכול להיות
למשל שכולם a או כולם הם b. או שיש איזה קומבינציה אחרת.
כמה פעמים מופיע a^n: מופיע רק פעם אחת כי מכל
זוג סוגריים בחרנו ב-a.
כמה פעמים מופיע $a^k \cdot b^{n-k}$: זה מופיע $\binom{n}{k}$ פעמים כי צריך
לבחור את ה-k מקומות שבהם מופיע a.

למשל: $(a+b)^2 = \underset{\binom{2}{0}}{\boxed{\ }} \cdot a^2b^0 + \underset{\binom{2}{1}}{\boxed{\ }} \cdot a^1b^1 + \underset{\binom{2}{2}}{\boxed{\ }} \cdot a^0b^2$

המקדם של ab הוא מספר האפשרויות לבחור בזוג סוגריים אחד
את a ובאחר את b.

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$$

מספר האפשרויות לבחור 0 פעמים את b
מספר האפשרויות לבחור פעם אחת את b
מספר האפשרויות לבחור פעמיים את b.
מספר האפשרויות לבחור 3 פעמים את b.

2.11.14

טענה:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

כעת הוכחה ללא סיפור. התבסס על מה שלמדנו.

הוכחה:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k \cdot 1^{n-k}$$

כאשר $a=1$ ו $b=1$).

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

טענה:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k = 0$$

נראה גישות שונות. בתחילה נראה גישה שלא מוכיחה עבור כל n, אלא רק עבור n-ים מסוימים. ואח"כ נעבור לגישה שמוכיחה עבור כל n.

איך נראה ש

$$\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(-1)^k = 0$$

כיון יש ערך בשלילה.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3}{k}(-1)^k = \binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0$$

גם עבור כל n אי זוגי אחר יש קיזוז של האיברים כי

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

נרצה להשתמש בדרך זו לגבי מקרה של $n=4$

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

אין כאן חלוקה לזוגות כך שכל שני בני זוג מקזזים זה את זה.

נראה שהטענה נכונה גם עבור $n=6$ למשל.

$$0 = 0^6 = (1-1)^6 = \sum\binom{6}{k}\cdot 1^k\cdot(-1)^{6-k} = \binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$$

לכן

$$\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-1)^k = 0$$

סכום המקדמים במקומות הזוגיים שווה לסכום המקדמים במקומות האי-זוגיים.

באופן כללי:

$$0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k(-1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}$$

ולכן סכום המקדמים במקומות הזוגיים שווה לסכום המקדמים במקומות האי זוגיים. זה נכון לכל n.

מרחב הסתברות

מרחב הסתברות מכיל אוסף תוצאות אפשריות - Ω.

כל מאורע מורכב מאוסף של נקודות (w) של תוצאות.
אומגה קטן.

למשל אם למשל הטלה שלנו היא של הטלת קוביה אז $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

מאורע של תוצאה זוגית הוא $A=\{2,4,6\}$.

נדרוש כמה דרישות לגבי מרחב הסתברות ונראה שהקיום של הדרישות האלה מקבלים תנאים שהם דברים שאפשר לדרוש.

נדרוש ש Ω יהיה אחד המאורעות. נדרוש גם שהקבוצה הריקה תהיה חלק מהאוסף. נדרוש גם שעבור כל קבוצה של מאורעות גם האיחוד שלהם הוא מאורע, זה יכול להיות איחוד סופי או איחוד אינסופי של מאורעות. נדרוש גם שעבור כל מאורע A גם המשלים שלו יהיה מאורע.

ניתן גם מידה לכל מאורע. זאת תהיה ההסתברות של אותו מאורע. $P(A)$

נניח הנחה ש: $P(\Omega)=1$.

דוגמאות למרחבי הסתברות:

1. דוגמא למרחב שמכיל רק את הקבוצה $\Omega=\{1\}$ אז המאורעות במרחב הם $\emptyset$ ו Ω. ברור שהאיחודים שלהם הם גם במרחב וברור ש: $P(\{1\})=1$.

2.11.14

ב. מרחב של הטלת קוביה. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ ונגדיר קבוצות

זוגיים $A=$ אי זוגיים $\bar{A}=$

אוסף הקבוצות שלנו יהיה

$$\{2,4,6\},\{1,3,5\},\{1,2,3,4,5,6\},\emptyset$$

נשים לב ש-איחוד של כל אוסף קבוצות הוא באוסף. (במרחב).

$P(\emptyset)=0$ $\quad P(\Omega)=1$ $\quad P(\{1,3,5\})=\frac{1}{2}$ $\quad P(\{2,4,6\})=\frac{1}{2}$.

זה מרחב סימטרי. שבו לכל איבר Ω יש אותה הסתברות.

דוגמה אחרת היא למרחב הסתברות לא סימטרי.

$\Omega=\{1,2\}$ $\quad P(1)=\frac{2}{3}$, $P(2)=\frac{1}{3}$ הגדרנו כך. במרחב ההסתברות שהגדרנו כך אין את ההסתברות.

ונגדיר מרחב הסתברות על כל תתי הקבוצות.

$P(\emptyset)=0$ $\quad P(\{1\})=\frac{2}{3}$ $\quad P(\{2\})=\frac{1}{3}$ $\quad P(\Omega)=1$.

עוד תנאי אחד למרחב הסתברות:

$P(A)\le 1$ אינו תכונה.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

עבור A_i זרות ואיחוד אין מניה (אינסופי) של מאורעות. מאורעות זרים.

מה התכונות שמהן נקבל עוד חמש תכונות:

א. $P(\emptyset)=0$

ב. אם $\{A_i\}$ אוסף של קבוצות זרות, מספר סופי של קבוצות זרות

אז $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

ג. אם $B\subseteq A$ אז $P(B)\le P(A)$

ד. תמיד $0\le P(A)\le 1$

ה. $P(A)+P(\bar{A})=1$ או $P(\bar{A})=1-P(A)$

הוכחות:

א. מה יכול להיות $P(\emptyset)$? יכול להיות איזשהו מספר ממש..

$\emptyset$ שווה גם לאיחוד אינסופי של קבוצות ריקות. אבל קבוצה ~~זרה~~ זרה לכל קבוצה ריקה. (היא זרה לכל קבוצה).

$$\emptyset=\emptyset\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\dots\to P(\emptyset)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\emptyset)$$

זה יכול להתקיים רק אם $P(\emptyset)=0$.

2.11.14

ב. ~~הבנו~~ הוכחנו שעבור מספר אינסופי של קבוצות מתקיים $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

נראה איך לקבל את התכונה עבור מספר סופי.

יש לנו n קבוצות זרות A_i ,$n \geq i \geq 1$ ונוסיף להן קבוצות

$A_i = \emptyset$ עבור $n < i$.

אזי יוצא: $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i) =$

שווה 0. $= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

מצד שני: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P((\bigcup_{i=1}^{n} \cup \emptyset)) = P(\bigcup_{i=n}^{n} A_1)$

כאשר נעבור את n שום תהיה קבוצה ריקה שההסתברות שלה היא 0.

עבור ∞ קבוצות זרות A_i נקבל:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \cancel{P} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

ד. אם $B \subseteq A$ אזי $A = \underbrace{B \cup (A \setminus B)}_{\text{זרות}}$

$$P(A) = P(B) + P(A \setminus B) \geq P(B)$$

ג. $A \subseteq \Omega$ ולכן $P(A) \leq P(\Omega) = 1$

$\emptyset \subseteq A$ ולכן $0 = P(\emptyset) \leq P(A)$

וקיבלנו את הנדרש.

ה. A ו- $\bar{A}$ הם קבוצות זרות ולכן $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) =$

$= P(\Omega) = 1$

ולכן $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

מרחב הסתברות - סיכום תכונות

- Ω הוא אחד מהמאורעות.
- $\emptyset$ חלק מהמרחב - חלק מה-אוסף.
- עבור כל קבוצה של מאורעות בתוך מרחב ההסתברות, אז האיחוד שלהם הוא מאורע בתוך המרחב. (איחוד סופי או אינסופי).
- עבור כל A בתוך המרחב אז $\bar{A}$ הוא מאורע.
- $P(\Omega)=1$
- $P(\emptyset)=0$
- $P(A)\leq 1$
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ עבור A_i זרים.
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- אם $B \subseteq A$ אז $P(B) \leq P(A)$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A)+P(\bar{A})=1$ או $P(\bar{A})=1-P(A)$