26.10.94

מבוא להסתברות - שעור ראשון:

תורת ההסתברות

קומבינטוריקה.

סוגיה:

(*) יש שני כדים, בכד הראשון יש 90 כדורים שחורים ועשרה כדורים לבנים. הכד השני להפך. יש עשרה כדורים שחורים ו-90 כדורים לבנים.

בוחרים באקראי ~~כד~~ כד. ומוציאים ממנו כדור. מה הסיכוי שהכדור שחור? 50% סיכוי כיוון שבשני הכדים יש סימטריה..

הסיכוי שהכדור הראשון שחור הוא חצי. ($\frac{1}{2}$) כיוון שיש סימטריה בין שני הכדים.

(*) נניח שהכדור הראשון היה שחור. אני מוציאה מאותו כד עוד כדור מאותו כד האם הסיכוי קטן או גדול מחצי.

אנחנו לא יודעים אם הכדור הוחזר או לא לכד אחרי זה אבל הכד לא השתנה!.

בעיקרון להתעלם מסיכוי אם הכדור לא הוחזר הסיכוי גדל כי מלכתחילה אם הכדור יצא שחור כנראה שהוא יצא מהכד השחור ולכן הסיכויים גדלים!

אם הכדור הראשון היה כדור שחור אז כפי הנראה אני בכד הראשון ולכן בין אם יש החזרות או אין החזרות הסיכוי שהבא שחור גדול מחצי.

כלומר יש משמעות אם יש החזרה או אין ולכן יש ליקוי בשאלה.

26.10

קבוצה - אוסף של עצמים.

למשל הקבוצה שמכילה את $1,2,3$ היא $\{1,2,3\}$ רושמים את האיברים של הקבוצה בסוגריים מסולסלות.

שייכות לקבוצה - 1 שייך לקבוצה $\{1,2,3\}$

רושמים כך $1\in\{1,2,3\}$ $A=\{1,2,3\}$ $1\in A$

הכלה בין קבוצות - מסמנים כך $\subseteq$

למשל: $A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,3\}$ אז $B\subseteq A$ (B מוכל ב A).

למשל אם $A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,3,6\}$ אז, $B\not\subseteq A$, $A\not\subseteq B$

קבוצת הטבעיים מסומנת ב- N. (טבעיים חיוביים).

$N=\{1,2,3\ldots\}$ קבוצת הטבעיים.

יש צורת רישום שונה של קבוצות למשל אם $A=\{-1,1\}$

אז ניתן לרשום את הקבוצה כך: $\{a \mid a^2=1\}$

זה התנאי שמשייך לקבוצה הנ"ל.

שוויון בין קבוצות: $A=B$ מתקיים אם $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$.

למשל אם $A=\{-1,1\}$ ו $B=\{x \mid x^2=1\}$ אז $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$. כי אבר של A נמצא ב B ולהיפך.

פעולות בין קבוצות:

איחוד: $A\cup B$ זה קבוצת כל האיברים שמוכלים ב A או ב B או בשניהם. למשל: אם $A=\{1,2,3\}$ ו $B=\{2,4,8\}$ אז $A\cup B=\{1,2,3,4,8\}$ כי זה כל המספרים משתי הקבוצות לא חייב שהמספרים יהיו בשני הקבוצות.

חיתוך: $A\cap B$ זה קבוצת האיברים שמוכלים ב A וגם ב B. אז אם $A=\{1,2,3\}$ ו $B=\{2,4,8\}$ אז $A\cap B=\{2\}$.

חיסור: $A\setminus B$ זה קבוצת האיברים שנמצאים ב A אבל לא ב B. $A\setminus B=\{1,3\}$

משלים של קבוצה: המשלים של קבוצה A מסומן ב A^c או $\bar{A}$.

זה קבוצת כל האיברים שאינם בקבוצה A.

26.10.14

למשל אם העולם שלנו הוא התלמידים בטכניקה אז המשלים של קבוצת הבנות זה קבוצת הבנים.

העולם שלנו שמכיל את כל האיברים מסומן ב Ω. (אומגה).

יש גם קבוצה אחרת מיוחדת שהיא הקבוצה הריקה. $\emptyset$.

זו קבוצה שלא מכילה אף איבר, ~~היא קבוצה מהן הקבוצות~~

היא לא שונה מסוגריים מסולסלים.

<u>הגדרה:</u>

תת קבוצה של קבוצה היא קבוצה שמוכלת בקבוצה המקורית.

למשל: אם $A=\{1,2\}$ אז אוסף הקבוצות החלקיות של A הוא:

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ * מחלקים את הקבוצות לתתי קבוצות. לכן גם הקבוצה המלאה היא תתי קבוצה. וגם קבוצה ריקה היא תת קבוצה.

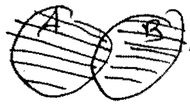
* אוסף הקבוצות החלקיות נקרא גם קבוצת החזקה של הקבוצה.

~~שוויון~~

צריך להראות שוויון בין קבוצות היא דיאגרמת ון.

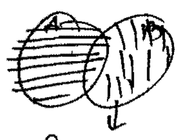
למשל: אנו רוצים להראות ש $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$ ~~$A\cup B$~~.

נצייר גרפית את הקבוצות



$= A\cup B$

אגף שמאל:



זה השטח $(B\setminus A)$.

לכן יש שוויון בין האגפים.

26.10.14

קומבינטוריקה:

יש קבוצה של 3 בנים ; 2 בנות. אני רוצה לבחור זוג שמכיל בן ובת. כמה אפשרויות יש לי?

יש לי $3\cdot2=6$ אפשרויות לבחור.

השתמשנו כאן בעיקרון הכפל. יש ניסוי ~~עם~~ שני שלבים.

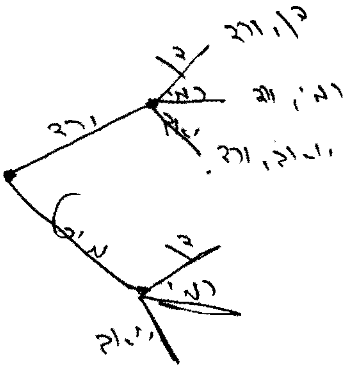
בשלב הראשון בוחרים בבת ובשלב השני בוחרים בבן.

בשלב הראשון יש שתי אפשרויות ובשלב השני יש שלוש אפשרויות ומספר הכולל של האפשרויות הוא מכפלת האפשרויות בשלבים השונים.

את הבחירה אפשר ~~להמחיש~~ *להמחיש על ידי עץ.

$A=\{$מיטל, ורד$\}$

$B=\{$יצחק, רמי, דן$\}$



* כך המחשנו באמצעות עץ.

שאלה:

בכיתה יש 70 תלמידים רוצים לבחור נשיא וסגן. כמה אפשרויות יש לי?

1. אם הם חייבים שונים. לפי עיקרון הכפל $70\cdot69$

[אחד פחות כי אסור שסגן יהיה אותו בן אדם.]

2. אם הם לא חייבים להיות שונים $70\cdot70$ גם לפי עיקרון הכפל.

$70\cdot70$ אפשרויות.

26.10.14

שאלה שמתקשרת לתורת הקבוצות.

<u>קבוצת החזקה</u> היא אוסף כל הקבוצות החלקיות של קבוצה.

$\Omega = \{1,2,3\}$

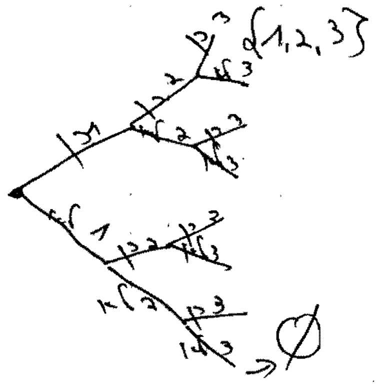
~~כמה~~ מה גודל קבוצת החזקה של Ω.

את קבוצת החזקה מסמנים ב- 2^{Ω}.

גודל של הקבוצה A מסמנים ב- $|A|$ שזה מספר האיברים שב A.

$|2^{\Omega}| = 2^3 = 8$ לפי עיקרון הכפל

אני צריך להחליט לגבי כל איבר אם לכלול אותו או לא לכלול אותו.



נמצא את 2^{Ω}.

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

זה כל תת הקבוצות כו' קבוצת החזקה. (אוסף כל תתי הקבוצות)

לכל איבר יש שתי אפשרויות ולכן זה 2^x בחזקת האיברים.

מהו אוסף כל ~~ה~~תתי הקבוצות בגודל 2 של Ω.

$\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

הגדרה - זוג סדור הוא זוג שבו חשוב הסדר מיהו הראשון בזוג ומיהו השני.

שאלה - מהו אוסף הזוגות הסדורים של Ω?

* זוג סדור הוא <u>לא</u> קבוצה חשוב בו הסדר בקבוצה לא חשוב הסדר.

$\{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$

לא מסמנים בסוגריים מסולסלים כי זה לא קבוצה

שאלה: למה יש בדיוק 6 זוגות סדורים.

יש לי בשלב ראשון 3 אפשרויות של בחירת בזוג הסדור ובשלב השני יש שתי אפשרויות לבחור באחד מבין הנותרים. $3 \cdot 2 = 6$ אפשרויות.

26.10.14

לכן על פי עיקרון הכפל יש $3\cdot 2=6$ זוגות סדורים.

שאלה:

כמה מילים באורך 10 יש מתוך א,ב שמכיל רק את האותיות a,b כך שכל אחת מהן מופיעה לפחות פעם אחת.

פיתרון:

ללא הגבלה יש 2^{10} אפשרויות כי יש 10 שלבים שבכל אחד מהם יש שתי אפשרויות.

קשה לענות על השאלה המקורית לפי עיקרון הכפל. לכן נלך לפי המשלים. קל למצוא את מספר המילים שבמשלים. שתי המילים היחידות שבמשלים הם הכל a או הכל b.

התשובה היא $2^{10}-2$.

$\underline{a/b}$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

יש 10 מקומות שלכל אחת 2 אפשרויות לכן 2^{10}. אנחנו צריכים שלפחות פעם אחת יופיע a/b. לכן מורידים את המשלים.

שאלה:

יש n אנשים רוצים לסדר אותם בשורה כמה סידורים יש?

לפי עיקרון הכפל.

יש n שלבים בראשון יש n אפשרויות אבל אחריו יש $n-1$ וכך הלאה באחרון יש רק אפשרות אחת.

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1$$

לזה קוראים $n!$.

שאלה:

יש n אנשים מה מס' הסידורים כך שדני ורמי לא יושבים אחד ליד השני?

הגישה כה תהיה שוב לפי חישוב ללא הגבלה והחסרת המקרים ה"לא טובים".

ללא הגבלה יש $n!$ אפשרויות. צריך להתייחס לדני ורמי כגוש אחד.

הפיתרון יהיה $n!-2!(n-1)!$

זה סידור דני ורמי שלהם.

יש $n-2$ אלמנטים אחרים של גודלים ויש את האלמנט של דני ורמי ולכן נספר $(n-1)!$

26.10.14

$n-1$ זה גודל הסלוטים שנשארו אחרי שהושבנו את בני ואת רמי (והחשבנו אותם כסלוט אחד).

אנחנו מחסירים את מספר המקרים שהם יושבים יחד שזה $2!(n-1)!$ כשהם יושבים יחד ולכן ~~[illegible]~~ מחסירים מהמקרה $n!$ הכללי. $(n-1)!$ זה הסידורים הבעייתיים של המקרים ~~[illegible]~~ שנשארו אחרי שהחסרנו את בני ורמי.

מדגם ~~[illegible]~~ בגודל k מתוך קבוצה בגודל n היא בחירה של k איברים מתוך הקבוצה של n איברים

(*) בוחרים תת קבוצה בגודל k.

- צריך להבהיר אם אפשרויות חוזרות וצריך להבהיר גם אם יש חשיבות לסדר.

<u>סוגיה</u>

יש 10 אנשים אני רוצה לבחור יושב ראש, גזבר ונשיא.
כמה אפשרויות יש כאשר אותו אדם יכול לבצע יותר מתפקיד אחד?

לפי עיקרון הכפל יש 10^3 אפשרויות.
(*) כאן מותר חזרות.

כעת נניח שאסור שאותו בן אדם יבצע את אותו תפקיד.
מהו מספר האפשרויות? $10 \cdot 9 \cdot 8$.
כאן אין חזרות!

נניח שאנחנו רוצים לבחור ועד של שלושה אנשים שלא חשוב הסדר שלהם ← הם לא בעלי תפקידים.
כאן אני צריך לחלק ב $3!$ את מספר האפשרויות.

(*) כאן הסדר הפנימי של הבחירה לא משנה!

התשובה היא $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$

יו"ש	נדב	הרינה
נשיא	הרינה	אמיר
גזבר	אמיר	נדב

הבחירות שקולות. (אין חשיבות לסדר)

כל אחת מ $10 \cdot 9 \cdot 8$ האפשרויות של השאלה הקודמת ~~[illegible]~~ מצויות בקבוצה של $3!$ אפשרויות שהן שקולות.
לכן מספר האפשרויות קטן.

26.10.14

אפשר להסתכל על זה אחרת. אם חשוב הסדר אז נדבר על סדור החבורה שיש לו $10!$ סידורים אבל הסידור של 7 האחרונים לא מעניין אותנו.

בשאלה הקודמת היה $\frac{10!}{7!}$ אפשרויות. ($10\cdot 9\cdot 8$).

מסדרים בשורה אבל הסידור של ה 7 האחרונים לא מעניין אותנו. הסדר של השלושה הראשונים כן מעניין אותנו.

בשאלה הזאת הסידור של שלושת הראשונים לא מעניין אותי

לכן נקבל $\frac{10!}{3!7!}$ הסידור הפנימי של השלושה הראשונים גם לא מעניין אותי.

כאשר אני בוחר בשלושה ללא חשיבות לסדר יש $\frac{10!}{7!3!}$ אפשרויות.

זה בסך שווה ל $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}$

אם חשוב הסדר אז יש לי $\frac{10!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8$ אפשרויות.

באופן כללי אם אנחנו רוצים לבחור מדגם בגודל k מתוך קבוצה בגודל n ללא חזרות עם חשיבות לסדר אז יש:

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}=(n)_k$$

סימון

זה כמו ה $7!$ הסדר של האיברים האחרונים לא חשוב לי. רק הסדר של ה k הראשונים לכן מחלקים.

אם $n=10$; $k=3$. אז זה $10\cdot 9\cdot 8=10(10-1)\cdot(10-2)=\frac{10!}{7!}=(10)_3$

מה מספר האפשרויות לבחור במדגם בגודל k מתוך n בלי החזרות ללא חשיבות לסדר?

תשובה: $\frac{(n)_k}{k!}=\boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$

הכוונה היא מה מספר המדגמים בגודל k מתוך n ללא החזרה וללא חשיבות לסדר.

k ראשונים	$n-k$
$k!$ סידורים פנימיים	$(n-k)!$ סידורים פנימיים

מחלקים בסידורים הפנימיים כי אין חשיבות לסדר.

הגדרה: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ בלי חשיבות לסדר ובלי חזרות.

נקרא לו n מעל k

26.10.14

מה מס' המדגמים בגודל k מתוך קבוצה בגודל n.

	עם חשיבות לסדר	בלי חשיבות לסדר
עם החזרות	n^k בכל שלב יש n אפשרויות. לכן מכפילים בגודל המדגם.	בשיעורים הבאים.
בלי החזרות	$(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

הוכיח ש: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

בדרך הוכחה אלגברית:

אגף שמאל $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

אגף ימין $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-\underbrace{(n-k)})!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

זה מצמצם ה k שלי עצמו
מה שנותן מחסירה את n.

דרך שניה:

$\binom{n}{k}$ זה מספר האפשרויות לבחור ~~באקראי~~ בקבוצה של k תלמידים מתוך n שאיתם אלך לטיול.
לבחור k שאיתם אלך לטיול.

$\binom{n}{n-k}$ זה מספר האפשרויות לבחור ב n-k שלא ילכו לטיול אז אם בחרתי n-k שלא ילכו לטיול שקולה לבחירת k שילכו. (זה כמו לבחור את המשלים). אם בחרתי את אלה שלא הולכים אז למעשה בחרתי את אלה שילכו.

שאלה:

הוכיחו: $\binom{n}{k}\cdot k = n\cdot\binom{n-1}{k-1}$

דרך אלגברית: נבדוק שמאל: $\binom{n}{k}\cdot k = \frac{n!k}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$

מצמצמים.

$$n\cdot\binom{n-1}{k-1} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$\boxed{n\cdot(n-1)! = n!}$

דרך שניה:

רוצים לבחור מתוך n אנשים ועד שיכלול נשיא ועוד $k-1$ חברים.

נבדוק שמאל: אני בוחר ועד בגודל k וממנו ממנה נשיא.

יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחור ועד ו-k אפשרויות למנות נשיא מתוך הועד. *בעצם בחירת הנשיא זה בעצם k אפשרויות לבחור נשיא כי יש לי k אנשים ואני צריכה נשיא אחד.

נבדוק ימין: נבחר בנשיא (יש n אפשרויות) ומתוך היתר נבחר ב-$k-1$ חברים. יש n אנשים וצריך נשיא אחד לכן $n=n$.

לאחר מכן נשאר $n-1$ אפשרויות שמתוכם נבחר k חברים ~~לנשיא~~ לועד אבל כבר יש חבר אחד בועד ולכן זה $k-1$ לבחור מתוך $n-1$.

יש n אפשרויות לבחור נשיא, נשארו $n-1$ אנשים שמהם אני בוחר $k-1$ חברים.

26.10.14

שאלה:

הוכיחו $n\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot k$

Σ זה סכום שרץ על פני אינדקס מסויים. למשל:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$$

דוגמא נוספת:

$$\sum_{k=1}^{4} 2^k = 2^1+2^2+2^3+2^4$$

הוכחה:

נתונה כיתה בגודל n המטרה היא לבחור בועד שמכיל נשיא ואולי עוד חברים. ללא הגבלה על גודל הועד.

דרך ראשונה:

נבחר בנשיא יש n אפשרויות. ואחר כך ~~לבחור~~ לכל אחד אחר נחליט אם להכליל בועד. לכן נשאר לי 2^{n-1} אפשרויות. כי "הכל" מתחלק לכן בועד או לא בועד ויש לי $n-1$ תלמידים לבדוק.

דרך שניה: נבחר ועד בגודל k כאשר k יכול להיות בכל גודל החל מ-1. מתוכו נבחר ~~מתוכו~~ נשיא. זה דרך שניה מבט-ספירה של מספר הועדים עם נשיא ועם קבוצת חברים.

אם למשל $n=7$ ~~ועדים~~ זה:

$$\binom{7}{1}\cdot 1+\binom{7}{2}\cdot 2+\binom{7}{3}\cdot 3+\binom{7}{4}\cdot 4 \dots \binom{7}{7}\cdot 7=\sum_{k=1}^{7}\binom{7}{k}k$$