$$\left(Z\middle|X=x\right)\sim Bin(x,p)\quad,\quad X\sim P(\lambda)$$

<u>טענה</u>

$Z\sim P(\lambda p)$ ( זאת אומרת ש $P(Z=z)=\dfrac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^z}{z!}$ )

<u>הוכחה</u>

כדי ש $Z$ יקבל את הערך $z$ צריך שהמשתנה $X$ יקבל ערך של לפחות $z$.

$$P(Z=z)=\sum_{x=z}^{\infty}P(X=x)\binom{x}{z}p^z(1-p)^{x-z}=\sum_{x=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\binom{x}{z}p^z(1-p)^{x-z}=$$

$$=\sum_{x=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{x!}{z!(x-z)!}p^z(1-p)^{x-z}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{z!}\sum_{x=z}^{\infty}\frac{\lambda^{x-z}(1-p)^{x-z}}{(x-z)!}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{z!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^y}{y!}$$

בתוך ה $\Sigma$ יש פיתוח טיילור ( שאותו תלמדו בחדו"א ) של $e^{\lambda(1-p)}$. לכן הביטוי כולו שווה ל

$$e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^z}{z!}e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^z}{z!}$$

<u>הוכחה בדרך שניה</u> שבה השלבים הראשונים זהים לראשונה

$$P(Z=z)=\sum_{x=z}^{\infty}P(X=x)\binom{x}{z}p^z(1-p)^{x-z}=\sum_{x=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\binom{x}{z}p^z(1-p)^{x-z}=$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^z}{z!}\sum_{x=z}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{x-z}}{(x-z)!}=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^z}{z!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^y}{y!}$$

כעת נחלק ונכפיל בגודל $e^{-\lambda(1-p)}$ ונקבל

$$\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{e^{-\lambda(1-p)}z!}\sum_{y=0}^{\infty}e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^y}{y!}$$

כעת בתוך ה- $\Sigma$ יש את סכום ההסתברויות של משתנה $P(\lambda(1-p))$. מכיון שזהו משתנה מקרי, אז הסכום הוא 1 ונקבל ביטוי $e^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^z}{z!}$ ( חלוקת $e^{-\lambda}$ ב $e^{-\lambda(1-p)}$ נותנת $e^{-\lambda p}$ ).

---